Programación en Python
Exercicios clases interactivas

Sesión 1: uso do intérprete interactivo de Python

Traballo en clase

1. **Instalar o intérprete de Python en Linux:** installar o paquete `python3` para o interprete de Python utilizando as ferramentas de instalación de paquetes que manexedes. O intérprete mellorado é o paquete `ipython3`. Utilizaremos o interprete `Python 3.7.x`.

   Na práctica, para cálculo científico, necesítase funcionalidade que non está no intérprete de Python. Durante o curso utilizaranse os seguintes paquetes (que hai que instalar ademais do intérprete de Python):

   - `numpy` (NUMeric Python): matrices e álxebra linear.
     `http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/`.
   - `scipy` (SCIentific Python): moitas rutinas numéricas (é como un numpy avanzado)
     `http://docs.scipy.org/doc/scipy-0.14.0/reference/`.
   - `matplotlib`: (PLOTting LIBrary): para gráficos
     `http://matplotlib.org/index.html`.
   - `sympy` (SYMbolic Python): cálculo simbólico
     `http://www.sympy.org/en/index.html`.

2. **Arrancar o intérprete interactivo de Python**. Para arrancar o intérprete interactivo de Python executa nun terminal o comando `python3` para arrancar o intérprete básico (aparece o símbolo >>> para comezar a introducir comandos) ou `ipython3` para arrancar o intérprete mellorado (aparece o símbolo `In [1]:`). En ambos os dous casos, para saír do entorno interactivo pódese introducir a combinación de teclas **Control-D** ou o comando `quit()`. Lembrade que para os comentarios en Python utilízase o símbolo # (o intérprete de Python ignora todo o que está a continuación deste símbolo e ate o final da liña). En todo momento podes limpar a terminal tecleando **Ctrl-L** ou en ipython3 executando o comando `clear`.

   Imos usar en adiante o `ipython3`. Ao entrar, executa o comando:

   ```
   %logstart -o sesion1.py append
   ```

   para que `ipython3` almacene no arquivo `sesion1.py` os comandos que executes e máis as súas saídas. Podes consultar a documentación das funcións de Python accedendo co navegador á **documentación online**.

3. **Instalar un IDE (*Integrative Development Environment*) para programar en Python:** `SPYDER` (Scientific Python Development EnviRonment) probablemente sexa o máis coñecido e está integrado dentro da distribución de Python **Anaconda** que podes descargar dende **aquí**. Anaconda inclúe os paquetes mencionados (`numpy`, `scipy`, `matplotlib` e `sympy`) e máis o IDE Spyder. Esta opción é a recomendada para as persoas que utilicedes o sistema operativo Windows. O SPYDER integra no mesmo programa un editor de texto e unha ventá co intérprete mellorado de Python(`ipython3`), ademáis doutras utilidades. Utilizaremos a versión de Python 3.7.x.

4. **Uso do intérprete de Python como unha calculadora**. A liña que comeza polo símbolo >>> é o comando de Python e a seguinte liña representa o resultado da execución de do comando.

   ```
   >>> 2+3 # suma
   5
   >>> 2 + 3 # suma
   5
   >>> 5 - 7 # resta
   -2
   ```

```
>>> 5 * 3 # multiplicacion
15
>>> 8 / 3 # division en punto flotante
2.6666666666666665
>>> 8.0 // 3 # division enteira
2.0
>>> 3 ** 2 # exponenciacion
9
>>> 11 % 4 # modulo (resto da division enteira)
3
>>> 5 - 2 * 3 # operacions encadeadas
-1
>>> (5 - 2) * 3 # cos parentesis mudase a precedencia dos operadores
9
```

5. **Variables e tipos de datos básicos**. Igual que no apartado anterior, as liñas que comezas polo símbolo >>> son comandos Python para executar e o resto das liñas son o resultado da execución do comando anterior.

```
>>> x = 5 # asigna o valor 5 a variable de nome x
>>> x # visualiza o valor da variable x
5
>>> print(x) # visualiza no terminar o valor da variable x
5
>>> type(x) # devolve o tipo de variable x
int
>>> y = 2.3 # asignacion
>>> type(y) # tipo de dato
float
>>> z = x + y # asignar a variable z o valor da avaliacion dunha expresion
>>> print(z)
7.3
>>> type(z)
float
>>> cadea = "Ola a todas" # asigna a variable co nome cadea unha cadea de caracteres
>>> print(cadea)
Ola a todas
>>> type(cadea) # devolve de tipo string (cadea de caracteres)
str
>>> c = 4 + 2j # asigna a variable c un numero complexo (ollo: 1+1j, non vale 1+j
>>> print(c)
(4+2j)
>>> type(c)
complex
>>> b = True # asignar a variable co nome b un booleano
>>> print(b)
True
>>> type(b)
bool
>>> c2 = 3 - 4j
>>> c + c2 # suma de numeros complexos
(7-2j)
>>> c * c2 # multiplicacion de numeros complexos
(20-10j)
>>> a, b, c = 5, False, "Ola" # asignacions multiples
>>> a
5
```

```
>>> b
False
>>> c
Ola
>>> 'c' in vars()  # True se c esta definida, False en caso contrario
True
>>> 'm' in vars()
False
```

6. **Funcións básicas**. Valor absoluto, tipo de dato, comparación de variables, conversión de tipos de datos.

```
>>> x = -3.4
>>> abs(x) # valor absoluto
3.4
>>> c = 4 - 3j # numero complexo
>>> abs(c) # valor absoluto
5.0
>>> type(x)
float
>>> y = int(x) # convirte x a un numero enteiro
>>> y
-3
>>> type(y)
int
>>> float(y) # convirte y a un numero real ou flotante
-3.0
```

7. **Funcións matemáticas**. Para executar as funcións matemáticas que normalmente existen nunha calculadora científica (funcións trigonométricas, logaritmos, etc.) hai que importar o módulo `math` da biblioteca estándar de Python. A partir dese momento, xa se pode utilizar as funcións matemáticas coma nunha calculadora.

```
>>> from math import * # importa todas as funcions do modulo math
>>> pi # constante pi definida no modulo math
3.141592653589793
>>> e # constante e definida no modulo math
2.718281828459045
>>> sin(0)
0.0
>>> sin(pi/2)
1.0
>>> sqrt(3) # raiz cadrada de 3
1.7320508075688772
>>> log(e) # logaritmo neperiano
1.0
>>> exp(2) # funcion exponencial -- e^2
7.38905609893065
>>> fabs(-7.3) # valor absoluto dun numero real
7.3
>>> x = 7.3
>>> ceil(x) # enteiro por exceso
8
>>> round(x) # enteiro mais proximo
7
>>> floor(x) # enteiro por defecto
7
```

```
>>> y=-3.8
>>> ceil(y); round(y); floor(y)
-3.0
-4.0
-4.0
```

8. **Funcións matemáticas con números complexos**. As funcións do paquete `cmath` acepta argumentos enteiros, reais e complexos (polo tanto, a biblioteca `cmath` contén a biblioteca `math`). En Python, un número complexo z almacénase internamente como un punto nun sistema de coordenadas cartesiano. Polo tanto, defínese pola súa parte real `z.real` e a súa parte imaxinaria `z.imag` (ou `z == z.real + z.imag * 1j`. En coordenadas polares, o número complexo z defínese como o módulo r e a fase ou ángulo ϕ. O módulo é a distancia desde z á orixe de coordenadas e a fase é o ángulo (no sentido antihorario) desde o eixo positivo das x ó segmento que une a orixe con z.

```
>>> from cmath import * # importa todas as funcions do modulo cmath
>>> z=complex(-1, 0)
>>> z
(-1+0j)
>>> z.real
-1.0
>>> z.imag
0.0
>>> phase(z) # fase de z
3.141592653589793
>>> import math
>>> math.atan2(z.imag, z.real) # equivalente a phase(z)
3.141592653589793
>>> abs(z)
1.0
>>> abs(z) # modulo de z
1.0
>>> polar(z) # z en coordenadas polares. Equivalente a (abs(z), phase(z))
(1.0, 3.141592653589793)
>>> rect(2, 2.3) # convirte de coordenadas polares a cartesianas
(-1.3325520425596482+1.4914104243534405j)
>>> 2*math.cos(2.3)+ math.sin(2.3)*1j # equivalente o comando anterior
(-1.3325520425596482+0.7457052121767203j)
```

9. **Manipulación de listas**. As listas son secuencias de elementos de calquer tipo separados por comas.

```
>>>  # definicion dunha lista e asignacion a variable x
>>> x = [4, 7.4, True, 4 + 2j, "Ola", [2, 1]]
>>> type(x)
list
>>> len(x) # devolve a lonxitude (numero elementos) da lista
6
>>> x[0] # acceso ao primeiro elemento da lista (empeza no 0)
4
>>> x[1] # acceso ao segundo elemento da lista
7.4
>>> y = x[5] # asigna o sexto elemento da lista a variable y
>>> y
[2, 1]
>>> type(y) # pensa que os elementos da lista poden ser listas
```

```
list
>>> x[-1] # acceso o ultimo elemento da lista
[2, 1]
>>> x[-2] # acceso o penultimo elemento da lista
'Ola'
```

10. **Manipulación avanzada de lista**. Faremos un exemplo cunha lista de números.

```
>>> x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] # definicion lista x
>>> n = len(x) # numero de elementos de x
>>> n
9
>>> max(x) # maximo elemento dunha lista
9
>>> min(x) # minimo elemento da lista
1
>>> sum(x) # suma os elementos da lista
45
>>> x[3] = 20 # modificacion do cuarto elemento
>>> x
[1, 2, 3, 20, 5, 6, 7, 8, 9]
>>> x[3:5] # acceso a un subrango de elementos do vector x
[20, 5]
>>> # o operador : permite especificar un rango continuo inicio:final
>>> x[0:n:2] # elementos non contiguos separados 2 posicions
[1, 3, 5, 7, 9]
>>> # para especificar rango non continuo inicio:final:incremento
x[4:] # acceso desde o quinto elemento ate o final
[5, 6, 7, 8, 9]
>>> x[:2] # acceso desde o primeiro elemento ate a posicion 2
[1, 2]
>>> x[2:-2] # desde o terceiro elemento ata o penultimo
[3, 20, 5, 6, 7]
>>> x
[1, 2, 3, 20, 5, 6, 7, 8, 9]
>>> x[2:4]
[3, 20]
>>> x[2:4] =[30, 30] # modifico unha subsecuencia ou subrango
>>> x
[1, 2, 30, 30, 5, 6, 7, 8, 9]
>>> x[4:7] = [] # borro elementos x[4] a x[6] na lista
>>> x
[1, 2, 30, 30, 8, 9]
x[2:3] = [1,2,3,4,5] # modifico a lista (tamen en lonxitude)
>>> x
[1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 30, 8, 9]
>>> x[2]=[]   #pon unha lista baleira na posicion 2
>>> x
[1, 2, [], 2, 3, 4, 5, 30, 8, 9]
>>> list(range(6))   # funcion range([ini,]fin[,paso])
# xera unha lista desde ini ou 0 ate fin-1 utilizando un incremento de paso
[0, 1, 2, 3, 4]
>>> list(range(1,5))
[1, 2, 3, 4]
>>> list(range(1,10,3))
[1, 4, 7]
```

11. **Métodos sobre listas**. Internamente en Python, as listas son obxectos polo que se poden utilizar métodos para a súa manipulación.

```
>>> x = [2, 4, 1, 8, 2] # defino lista x
>>> len(x)  # numero de elementos
5
>>> 1 in x  # comproba se 5 está en x
True
>>> 8 not in x  # comproba se 8 non está en x
False
>>> x.insert(3, 10) # inserto 10 na cuarta posicion
>>> x
[2, 4, 1, 10, 8, 2]
>>> x.append(5)  # engado 5 o final da lista
>>> x
[2, 4, 1, 10, 8, 2, 5]
>>> x.reverse() # invirte a orde da lista
>>> x
[5, 2, 8, 10, 1, 4, 2]
>>> x.sort()  # ordea a lista por orde crecente
>>> x
[1, 2, 2, 4, 5, 8, 10]
>>> x.sort(reverse=True)  # ordea a lista por orde decrecente
>>> x
[10, 8, 5, 4, 2, 2, 1]
>>> x.count(2)  # conta as ocorrencias do 2
2
>>> x.remove(8)  # elimina a 1a ocorrencia do 8 da lista x
>>> x
[1, 2, 2, 4, 5, 10]
>>> x.index(5)  # devolve a posicion do elemento 5 en x
4
>>> x.index(2)  # devolve o indice onde aparece o primeiro 2 en x
1
>>> x.index(7)  # da erro porque 7 non esta en x
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-8-d1d923be6124> in <module>
----> 1 x.index(7)
ValueError: 7 is not in list
>>> del x[4]  # elimina o elemento da quinta posicion na lista x
>>> x
[1, 2, 2, 4, 10]
>>> 2 in x    # retorna True se 2 esta na lista x
True
>>> x.count(2)  # outra forma de ver se 2 esta en x
2
>>> 'count' in dir(x) # indica se o metodo count esta no obxecto x (neste caso unha lista)
True
>>> 'print' in dir(x)  # a lista non ten un metodo print
False
>>> dir(x)  # mostra os atributos e metodos do dato x
```

12. **Vectorización de operacións sobre listas**. Faise con `[f(i) for i in x]` ou `[f(i,j) for i,j in zip(x,y)`, por exemplo `f(i)=i**2` ou `f(i,j)=i*j`, sendo `x` e `y` listas da mesma lonxitude, onde `zip(x,y)` é a lista dos pares onde o primeiro elementos do par é de `x` e o segundo de `y`.

```
>>> x=[2.5, 3.1, 8.4]
>>> [int(i) for i in x]  # vectoriza o redondeo a enteiro sobre toda a lista
[2, 3, 8]
>>> z=[i**2 for i in x]  # z[i]=x[i]**2 vectorizado
[6.25, 9.61, 70.56]
>>> y=[1,2,3]
>>> zip(x,y) # pares de elementos (x[i],y[i]) sendo as listas x,y da mesma lonxitude
<zip at 0x7fbab5df1e00>
>>> list(zip(x,y))
[(2.5,1), (3.1,2), (8.4,3)]
>>> z=[i*j for i,j in zip(x,y)]  # z[i]=x[i]*y[i] vectorizado
>>> z
[2.5, 6.2, 25.2]
```

13. **Tuplas**. Son secuencias de elementos como as listas pero na que os seus elementos non se poden modificar.

```
>>> a = (1,2,3,4,5) # definicion dunha tupla
>>> type(a) # tipo de dato
tuple
>>> len(a) # numero de elementos
5
>>> a[1:3] # acceso a una subsecuencia da tupla
(2, 3)
>>> a[1] = 10 # da erro,  unha tupla non se pode modificar
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: 'tuple' object does not support item assignment
```

14. **Cadeas de caracteres**.

```
>>> s='ola a todas'  # definición de cadea de caracteres
>>> len(s)   # lonxitude da cadea
11
>>> s.count(' ')  # numero de espazos na cadea
2
>>> s.index(' ')  # posición do primeiro espazo: da erro se non está
3
>>> s.find(' ')  # outra forma de atopar a posición do primeiro espazo: da -1 se non está
3
>>> from numpy import flatnonzero
>>> flatnonzero([i.isspace() for i in s])   # índices dos espazos en s
array([3, 5])
>>> ' ' in s  # comproba se a cadea ten un espazo
True
>>> s='x=123'
>>> [i.isdigit() for i in s]  # testea se cada carácter é un díxito
[False, False, True, True, True]
>>> sum([i.isdigit() for i in s])  # número de díxitos en s
3
>>> '=' in s  # comproba se '=' está en s
True
>>> 'a' not in s  # comproba se 'a' non está en s
True
```

Traballo a desenvolver polo alumnado

1. Define as variables $x = 4$, y=5.6, $z = 3$, $c = 4 + 5j$, $d = -3 + 2j$, b =True e m ="Exemplo de python" e realiza o seguinte:

   a) Calcula $x + z$, x^z, yz, resto da división $\frac{x}{z}$, $(z - x)y^2$, cd e $\frac{c}{d}$.

   b) Comproba o tipo de dato de cada variable.

   c) Calcula $y + \frac{x}{z}$, a división enteira de $\frac{y}{x}$

   d) Calculo o máximo e mínimo de x, y e z.

   e) Calcula o factorial de x.

2. Avalía as seguintes expresións: $\text{sen}^2(\pi)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, $e^3 \log 5$, $e^{\sqrt{2\pi}}5$, $\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$, $e^{7\pi/3}$, $8\pi^{50}$, $\sqrt{40\pi^5 + 6\pi + e^{7\pi}}$

3. Calcula o valor absoluto de x=-8.3 e $y = -4$

4. Calcula o valor máis próximo, valor por exceso, valor por defecto e parte enteira de x=4.2, y=-3.7 e z=-3.6+4.2j.

5. **Listas**: Define unha lista cos seguintes elementos $3, 4, 5, 6, 2, 6, 4, 1, 3, 4$ e realiza as seguintes operacións:

   a) Calcula o número de elementos.

   b) Comproba o tipo de dato da variable na que está almacenada.

   c) Accede ó terceiro elemento, que será o 5.

   d) Accede ós primeiros 4 elementos.

   e) Accede ós últimos 3 elementos.

   f) Calcula o máximo e o mínimo dos elementos da lista.

   g) Suma os elementos da lista.

   h) Conta o número de veces que aparece o valor 4 na lista.

   i) Modifica o sexto elemento polo valor 20.

   j) Accede ós elementos entre a terceira e septima posición na lista.

   k) Accede ós elementos situados nas posicións impares da lista (posicións $1, 3, 5, \ldots$).

   l) Elimina os elementos nas posicións cuarta, quinta, sexta e septima.

   m) Modifica os elementos das posicións segunda e terceira da lista polos valores $30, 40$.

   n) Engade o elemento 15 ó principio da lista.

   ñ) Engade o elemento 50 ó final da lista.

   o) Engade o elemento 60 na posición 4 da lista (lembra que o primeiro elemento é a posición 0).

   p) Invirte a orde da lista.

   q) Ordea a lista de menor a maior.

   r) Calcula a posición do número 40 na lista e elimínao.

Sesión 2 : cálculo científico con NumPy

Traballo en clase

O paquete Numpy ten funcionalidade para realizar operacións vectorizadas (aplicar unha operación a todo un vector ou matriz no canto dun escalar ó estilo do linguaxe de programación Matlab). O tipo de dato máis importante é `array` para representar vectores, matrices e vectores multidimensionais. O `array` é como unha lista de Python na que todos os seus elementos son do mesmo tipo (`Sn, bool, int8, int16, int32, int64, uint8, uint16, uint32, uint64, float, float32, float64, complex, complex128`). Nos seguintes apartados revísanse algunhas funcionalidades de Numpy executando comandos.

1. Probas no intérprete `ipython3`:

```
>>> from numpy import *
>>> x = array([1,2,3,4,5,6])  # creacion dun array a partires dunha lista
>>> z = list(x)  # creacion dunha lista a partires dun array
>>> x.ndim  # dimension do array
1
>>> x.size  # numero de elementos
6
>>> x.itemsize  # numero de bytes que ocupa cada elemento
8
>>> x.dtype  # tipo de dato dos elementos
dtype('int64')
>>> x[::-1]  # mostra os elementos de x en orde invertida
array([6, 5, 4, 3, 2, 1])
>>> 3 in x   # da True se 3 esta en x, False en caso contrario
True
>>> z = arange(1,6, dtype='int8')  # creacion dun array coa funcion arange()
>>> z
array([1, 2, 3, 4, 5])
>>> z.dtype
dtype('int8')
>>> z = arange(1,6,0.2, dtype='float') # creacion dun array
>>> z
array([ 1. ,  1.2,  1.4,  1.6,  1.8,  2. ,  2.2,  2.4,  2.6,  2.8,  3. ,
        3.2,  3.4,  3.6,  3.8,  4. ,  4.2,  4.4,  4.6,  4.8,  5. ,  5.2,
        5.4,  5.6,  5.8])
>>> z.size
25
>>> xl = linspace(1,8, 10) # crea un vector de elementos equiespaciados
# con linspace()
>>> xl
array([ 1.        ,  1.77777778,  2.55555556,  3.33333333,  4.11111111,
        4.88888889,  5.66666667,  6.44444444,  7.22222222,  8.        ])
>>> a = ones([2,3])  # creacion dun array de 2 filas e 3 columnas
>>> a
array([[ 1.,  1.,  1.],
       [ 1.,  1.,  1.]])
>>> a.ndim
2
>>> a.dtype
dtype('float64')
>>> b = zeros([3,4], dtype='int')
```

```
>>> b
array([[0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0]])
>>> c=b  # copia por referencia
>>> c[1][2]=5 # modifico elemento (1,2)
>>> c
array([[0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 5, 0],
       [0, 0, 0, 0]])
>>> b  # os cambios tamen se ven reflexados en b
array([[0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 5, 0],
       [0, 0, 0, 0]])
>>> d =c.copy() # copia real da matriz c en d
>>> d
array([[0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 5, 0],
       [0, 0, 0, 0]])
>>> d[0][0]=30  # modifico matriz d
>>> d
array([[30,  0,  0,  0],
       [ 0,  0,  5,  0],
       [ 0,  0,  0,  0]])
>>> c  # a matriz c non se modifica
array([[0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 5, 0],
       [0, 0, 0, 0]])
>>> x=array([1,2,3])  # creo vector x
array([1, 2, 3])
>>> x = insert(x, 1, 20)  # inserto elemento 20 na posicion 1
>>> x
array([ 1, 20,  2,  3])
>>> x=append(x, 30)  # engado o valor 30 o final do vector
>>> x
array([ 1, 20,  2,  3, 30])
>>> x=delete(x,2)  # borro en x o elemento na posicion 2
>>> x
array([ 1, 20,  3, 30])
>>> y=array([[1,2,3],[4,5,6]]) # creo matriz y a partires dunha lista
>>> y
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6]])
>>> y.ndim # numero de dimensions
2
>>> y.T  # matriz transposta
array([[1, 4],
       [2, 5],
       [3, 6]])
>>> y.flatten() # convirto matriz en vector (conversion por filas)
array([1, 2, 3, 4, 5, 6])
>>> y
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6]])
>>> ravel(y) # igual que flatten pero funcion
array([1, 2, 3, 4, 5, 6])
>>> y = ravel(y, 'F')  # conversion de matriz en vector por columnas
```

```
>>> y
array([1, 4, 2, 5, 3, 6])
>>> concatenate((x,y))  # concatena dous vectores
array([ 1, 20,  3, 30,  1,  2,  3,  4,  5,  6])
>>> y=ones([2,3])  # creo matriz de uns
>>> y
array([[ 1.,  1.,  1.],
       [ 1.,  1.,  1.]])
>>> z=zeros([2,3])  #creo matriz de ceros
>>> hstack((y,z))  # aplilo arrays dimensionais horizontalmente
array([[ 1.,  1.,  1.,  0.,  0.,  0.],
       [ 1.,  1.,  1.,  0.,  0.,  0.]])
>>> vstack((y,z)) # aplilo arrays dimensionais verticalmente
array([[ 1.,  1.,  1.],
       [ 1.,  1.,  1.],
       [ 0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.]])
>>> x
array([ 1, 20,  3, 30])
>>> x[0]  # accedo o primeiro elemento do vector x
1
>>> x[1:2] # accedo a un rango de valores do vector
array([20])
>>> x[6]  # erro por acceder a unha posicion que non existe
>>> y
array([[ 1.,  1.,  1.],
       [ 1.,  1.,  1.]])
>>> y[0,1] # aceder o elemento da fila 0 e columna 1 da matriz y
1.0
>>> y=array([[1,2,3,4],[5,3,4,2]])
>>> y
array([[1, 2, 3, 4],
       [5, 3, 4, 2]])
>>> y[0,:] # devolve a fila 0 de y
array([1, 2, 3, 4])
>>> y[:,2]  # devolve a columna 2 de y
array([3, 4])
>>> y[0:2, 1:3]  # acceder a subrangos de matriz
array([[2, 3],
       [3, 4]])
>>> y.reshape(4,2) # modifica a dimensions da matriz
array([[1, 2],
       [3, 4],
       [5, 3],
       [4, 2]])
>>> xx=array(x, 'float')  # modifico o tipo dun vector
>>> xx
array([  1.,  20.,   3.,  30.])
>>> xx/2 # division vectorial
array([  0.5,  10. ,   1.5,  15. ])
>>> x-4
array([-3, 16, -1, 26])
# operacions aritmeticas vectoriais
>>> a=array([1,2,3,4])
>>> a
array([1, 2, 3, 4])
>>> xx
```

```
array([  1.,  20.,   3.,  30.])
>>> a*xx # multiplica elemento a elemento dous vectores
array([   1.,   40.,    9.,  120.])
>>> dot(a, xx) # realiza o producto matricial (producto escalar)
170.0
>>> dot(y, xx) # producto matriz-vector
array([ 170.,  137.])
>>> dot(y, y.T) # producto matricial
array([[30, 31],
       [31, 54]])
# operacions relacionais vectoriais
>>> x
array([ 1, 20,  3, 30])
>>> x > 10
array([False,  True, False,  True], dtype=bool)
>>> x >= 3
array([False,  True,  True,  True], dtype=bool)
>>> sin(x)
array([ 0.84147098,  0.91294525,  0.14112001, -0.98803162])
>>> round(sin(x)) # devolve erro porque round() so se aplica a escalares
>>> round_(sin(x))
array([ 1.,  1.,  0., -1.])
>>> exp(x)
array([  2.71828183e+00,   4.85165195e+08,   2.00855369e+01,
         1.06864746e+13])
>>> xf=x.astype('float')  # modifico tipo a un vector
>>> xf
array([  1.,  20.,   3.,  30.])
>>> xf.dtype
dtype('float64')
>>> xf=float64(x)  # modifico tipo a un vector
array([  1.,  20.,   3.,  30.])
>>> x
array([ 1, 20,  3, 30])
>>> sort(x) # mostra os elementos de x ordeados de menor a maior
array([ 1,  3, 20, 30])
>>> x.sort() # cambia x ordeando os seus elementos
>>> x
array([ 1,  3, 20, 30])
>>> sort(x)[::-1]  # mostra os elementos de x ordeados de maior a menor
array([30, 20,  3,  1])
>>> x[::-1].sort()  # cambia x ordeando os seus elementos por orde decrecente
>>> x
array([30, 20,  3,  1])
>>> argsort(x) # devolve as posicions
array([0, 2, 1, 3])
>>> flatnonzero(x%2==0)  # posicions dos elementos que cumpren a condicion
array([2, 3])
>>> where(x%2==0)[0]  # outra forma de obter os indices
array([2, 3])
>>> a=array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])
>>> a
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6],
       [7, 8, 9]])
>>> a%2==1  # True en elementos impares
array([[ True, False,  True],
```

```
       [False,  True, False],
       [ True, False,  True]], dtype=bool)
>>> diagonal(a)  # a.diagonal() fai o mesmo
array([1, 5, 9])
>>> a.prod(0)  #producto elementos por columnas
array([28, 80,  0])
>>> a.sum(1) # suma dos elementos de a por filas
array([ 6,  9, 24])
>>> all(a)
True
>>> a[1,2]==0
>>> a
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 0],
       [7, 8, 9]])
>>> all(a)
False
>>> all(a,0)  # all por columnas
array([ True,  True, False], dtype=bool)
>>> all(a,1)  # all por filas
array([ True, False,  True], dtype=bool)
>>> all(a>=0)  #True se todolos elementos son positivos
True
>>> any(a%2==0)   #True se ten elementos pares
True
>>> a[a%2==0] #valores dos elementos pares
array([2, 4, 0, 8])
>>> extract(a%3==0,a) # elementos multiplos de tres
array([3, 0, 9])
>>> b=array([[1,-2,3],[-4,5,-6],[7,-8,9]])
>>> b
array([[ 1, -2,  3],
       [-4,  5, -6],
       [ 7, -8,  9]])
>>> allclose(a,b)
False
>>> array_equal(a,b) # True se son a e b son iguais
False
>>> greater(a,b)
array([[False,  True, False],
       [ True, False,  True],
       [False,  True, False]], dtype=bool)
>>> less(b,a)
array([[False,  True, False],
       [ True, False,  True],
       [False,  True, False]], dtype=bool)
>>> a==b    # True onde a[i,j]==b[i,j]
array([[ True, False,  True],
       [False,  True, False],
       [ True, False,  True]], dtype=bool)
>>> equal(a,b)  # igual que a==b
array([[ True, False,  True],
       [False,  True, False],
       [ True, False,  True]], dtype=bool)
>>> not_equal(a,b)  # True onde a[i,j]!=b[i,j]
array([[False,  True, False],
       [ True, False,  True],
```

```
       [False,  True, False]], dtype=bool)
>>> logical_and(a,b)  # a[i,j] AND b[i,j]
array([[ True,  True,  True],
       [ True,  True, False],
       [ True,  True,  True]], dtype=bool)
>>> logical_or([1,0,2,-1,1],[0,0,1,0,-1])
array([ True, False,  True,  True,  True], dtype=bool)
>>> logical_not([0,0,1,0,-1])
array([ True,  True, False,  True, False], dtype=bool)
>>> where(a>2,a,-1) # valor de a onde a>2 e no resto -1
array([[-1, -1,  3],
       [ 4,  5, -1],
       [ 7,  8,  9]])
>>> where(logical_and(a>=2,a<=6),-1,0)
array([[ 0, -1, -1],
       [-1, -1,  0],
       [ 0,  0,  0]])
>>> argmax(a)
8
>>> argmax(a,0)  # indice do valor maximo por columnas
array([2, 2, 2])
>>> argmax(a,1)  # o mesmo por filas
array([2, 1, 2])
>>> # Estadistica basica
>>> amin(a) # minimo de a
-1
>>> amin(a, 0) # minimo por columnas
array([-1, -1, -1])
>>> amin(a, 1)  # minimo por filas
array([-1, -1,  7])
>>> ptp(a) # rango de valores maximo - minimo de a
10
>>> mean(a) # volor medio de a
3.6666666666666665
>>> median(a) # mediana de a
4.0
>>> std(a) # desviacion tipica dos elementos de a
3.7416573867739413
```

2. Entrada e saída a arquivos de texto usando `NumPy`.

```
>>> from numpy import *
>>> x=array([[1,2,3,4],[5,6,7,8],[3,4,5,6],[5,4,3,2]])
>>> savetxt('datos.txt', x)  # garda array x en datos.txt en formato real exponencial
>>> savetxt('datos.txt', x, '%i')  # garda array x en datos.txt como enteiros
>>> y=loadtxt('datos.txt')  # por defecto le datos tipo float
>>> y
array([[ 1.,  2.,  3.,  4.],
       [ 5.,  6.,  7.,  8.],
       [ 3.,  4.,  5.,  6.],
       [ 5.,  4.,  3.,  2.]])
>>> y=loadtxt('datos.txt','int')  # le datos enteiros
>>> y
array([[1, 2, 3, 4],
       [5, 6, 7, 8],
       [3, 4, 5, 6],
       [5, 4, 3, 2]])
```

```
>>> y.dtype
dtype('float64')
>>> x[1,2]=400  # modifico x[1,2]
>>> x
array([[  1,   2,   3,   4],
       [  5,   6, 400,   8],
       [  3,   4,   5,   6],
       [  5,   4,   3,   2]])
>>> savetxt('datos.txt', x, '%10i')  #formato enteiro 10 cifras
>>> y=loadtxt('datos.txt')
>>> y
array([[   1.,    2.,    3.,    4.],
       [   5.,    6.,  400.,    8.],
       [   3.,    4.,    5.,    6.],
       [   5.,    4.,    3.,    2.]])
```

3. **Xerar números aleatorios**. Podes xerar números aleatorios co módulo de biblioteca estándar de Python `random` ou co submódulo `random` do paquete `numpy`.

   a) Módulo `random` da biblioteca estándar:

   ```
   >>> import random
   >>> random.random() # numero aleatorio real en [0, 1)
   0.28118255134106407
   >>> a=-10;b=20;(b-a)*random.random()+a  # numero real aleatorio en [a,b)
   -3.757933704492528
   >>> random.uniform(3, 7) # numero aleatorio real en [3,7]
   4.974120218829189
   >>> random.randint(3,7) # numero aleatorio enteiro en [3,7]
   3
   >>> random.randrange(3, 20) # numero aleatorio nunha secuencia
   10
   >>> random.choice(range(3,20,1)) # equivalente ao anterior
   4
   >>> x=[3,4,8,1,0,5]
   >>> random.shuffle(x) # baralla a secuencia
   >>> x
   [3, 4, 1, 8, 5, 0]
   >>> random.sample(x, 3) # devolve 3 elementos escollidos aleatoriamente de x
   [0, 5, 8]
   >>> random.choice(x) # devolve un elemento escollido aleatoriamente de x
   3
   ```

   b) Para usar o submódulo `random` do paquete `numpy`, necesítase cargalo explícitamente, aínda que o `numpy` xa estea cargado. Con respecto ó módulo `random` da biblioteca estándar ofrece o xerar matrices e vectores de números aleatorios, e opera co tipo de datos `array` de `numpy` no canto do tipo de dato `list` de Python. Se se usan os dous módulos no mesmo programa pode haber ambigüedade xa que teñen funcións cos mesmos nomes (esto resólvese, por exemplo, importando doutro xeito os módulos).

   ```
   >>> from numpy.random import * # cargar en memoria modulo random
   >>> rand() # devolve un numero aleatorio real en [0,1)
   0.3130237566728453
   >>> a=-10;b=20;(b-a)*rand()+a  # numero real aleatorio en [a,b)
   -3.757933704492528
   >>> rand(2,3) # matriz de numeros aleatorios reais en [0,1)
   array([[ 0.60076503,  0.98189915,  0.15762115],
   ```

```
       [ 0.02760126,  0.33241119,  0.30466891]])
>>> random([2,3]) # matriz de numeros aleatorios reais en [0,1)
array([[ 0.46284244,  0.40791779,  0.53317039],
       [ 0.8805399 ,  0.5118586 ,  0.510961  ]])
>>> x=round_(10*rand(10)) # vector con numeros aleatorios enteiros en [0,10]
>>> x
array([  8.,   5.,   1.,   7.,  10.,   2.,   2.,   9.,   7.,   8.])
>>> randint(3,15,10)  # vector con 10 numeros enteiros entre 3 e 15
array([12,  3, 12,  9, 13,  4,  8, 11,  6,  5])
>>> randint(3,15,[2,4]) # matriz 2x4 con numeros enteiros entre 3 e 15
array([[ 6,  4,  8,  9],
       [ 6, 12,  4,  3]])
>>> shuffle(x) # baralla os elementos de x
>>> x
array([  1.,  10.,   7.,   5.,   2.,   8.,   9.,   2.,   8.,   7.])
>>> permutation(3) # realiza permutacions sobre range(3)
array([0, 2, 1])
>>> permutation([4,2,7,5])
array([5, 7, 4, 2])
```

Traballo a desenvolver polo alumnado

Realiza por orde os seguintes exercicios:

1. Define unha lista `z` cos seguintes elementos: 1, 2, 3, 4, 3, 2, 5, 6, 7, 8, 4, 2, 1
2. Crea un vector (`array`) `x` a partires da lista `z`.
3. Sobre o array ou vector `x` calcula a seguinte información:
   a) O número de dimensións e os seus valores.
   b) O número de elementos.
   c) O tipo de datos almacenados en `x`.
4. Crea unha matriz `a` de dimensións 3×4 a partir do vector `x`.
5. Realiza sobre a matriz `a` o cálculo de número de dimensións e os seus valores, número de elementos e tipo de datos dos seus elementos.
6. Crea un vector (`array`) `y` con 12 elementos equiespaciados no intervalo $[1, 5]$.
7. Crea un vector `p` con elementos no intervalo $[1, 5)$, utilizando un espaciado entre elementos de 0.25.
8. Asigna o valor 20 ó cuarto elemento de `p`.
9. Asigna o valor 30 ó elemento que se sitúa na segunda fila e primeira columna da matriz `a`.
10. Copia o vector `x` nos vectores `xr` e `xv` utilizando unha copia por referencia e por valor respectivamente. Modifica un elemento en ambos vectores e describe que cambios ocurriron no vector `x`.
11. Convirte o vector `y` nun vector de números enteiros utilizando varias opcións.
12. Inserta o valor 15 no vector `x` ó principio, final e na sexta posición do vector `x`.
13. Borra o cuarto elemento do vector `x` e asígnao ao vector `v`.
14. Convirte a matriz `a` nun vector, realizando a conversión por filas e columnas.
15. Une os vectores `x` e `y` no vector `w`.
16. Define unha matriz de ceros, chamada `b`, de orde 3×4. Realiza a unión da matriz `a` e `b` por filas e por columnas.

17. Crea a lista `l1` cos elementos 1, 2 e 3. Engade esta lista como a primeira columna da matriz `a`.

18. Suma o valor 1 a todos os elementos da matriz `a`.

19. Divide por 10 tódolos elementos do vector `x`.

20. A partir da lista [3.5, -2.3, -0.7, 4.2, 1.6], obtén vectores cos enteiros máis próximos por exceso e por defecto, a parte enteira e o enteiro máis próximo. Tamén a valor medio e a varianza.

21. Sexa `v` o vector $[4, 1, 6, 1, 2, 8, 1, 6]$, realiza as seguintes operacións:

    a) Ordea o vector `v` de menor a maior e obtén as posicións dos números ordeados.

    b) Calcula o valor mínimo de `v` e as posicións onde se atopa o mínimo.

    c) Calcula os valores de `v` que son superiores a 2, e as posicións deses valores no vector.

    d) Devolve un vector cos elementos v_i de `v` que cumplen a condición $0 < v_i < 5$.

    e) Calcula un vector, das mesmas dimensións de `v`, cos elementos de `v` comprendidos no intervalo $[-1, 3]$ e 5 no resto.

22. Covvirte o vector `v` anterior nunha matriz `a` de dimensións 4×2 e realiza as seguintes operacións:

    a) Calcula un vector cos valores de `a` que son superiores a 2.

    b) Devolve un vector cos elementos a_{ij} de `a` que cumplen a condición $0 < a_{ij} < 5$.

    c) Calcula unha matriz `c` cos elementos de `a` comprendidos no intervalo $[-1, 3]$ e 5 no resto.

    d) Garda a matriz `c` no arquivo de texto `datos.txt`.

    e) Le o contido arquivo `datos.txt` e almacénao na variable `d`.

23. Crea unha matriz `a` de orde 3×4 con números enteiros aleatorios no intervalo [5,10].

24. Crea un vector `x` de lonxitude 10 con elemento aleatorios en [0,10).

Sesión 3 : Representación gráfica con Matplotlib e calculo simbólico con Sympy

Traballo en clase

Para a representación gráfica en Python utilízase o paquete externo **Matplotlib**. Na galería da documentación en liña (`http://matplotlib.org/gallery.html`) podes ver con exemplos todas as posibles gráficos que se poden facer con esta librería. Formas de executalo: a) dende o intérprete `ipython3` utilizar o subpaquete `pylab` (poñendo `from pylab import *`) do paquete `matplotlib` (non está por defecto no intérprete de Python e hai que instalalo); ou b) executar o intérprete `ipython` coa opción –pylab: `ipython3 --pylab`. Aquí tes un exemplo de gráfico de liñas en 2D con `python3`:

```
>>> from pylab import *
>>> x = linspace(-pi,pi,100)
>>> y = sin(2*pi*x)
>>> plot(x, y, linewidth=1.0)
>>> xlabel('Tempo (s)')
>>> ylabel('Tension (mV)')
>>> title('Tension frente a tempo')
>>> grid(True)
>>> show(False)   #crea a figura e retorna a consola
```

É moito mellor usar a consola interactiva `ipython3 --pylab`, porque non hai que facer o `show(False)` e ademáis calquer cambio que fagas xa se mostra na ventá do gráfico:

```
>>> # crea un vector con 256 elementos entre -pi e pi
>>> X = linspace(-pi, pi, 256,endpoint=True)
>>> C,S = cos(X), sin(X)  # calcula o seno e coseno dos vectores anteriores
>>> plot(X,C)  # grafico de linhas do vector C en funcion de X
>>> plot(X,S)  # engade o grafico de linhas do vector S
>>> # grafico con linha continua vermella con ancho 2 pixels
>>> plot(X, C, color="red", linewidth=2.0, linestyle="-")
>>> figure(3)  # crea unha nova figura
>>> # grafico do coseno cambiando color, linha, simbolo
>>> plot(X, S, color="green", linewidth=1.0, linestyle="--", marker="*")
>>> plot(X, C, color="red", linewidth=2.0, linestyle="-")
>>> xlim(X.min(),X.max())  # establece os limites no eixo x
>>> ylim(-1.0,1.0)  # establece os limites no eixo y
>>> yticks([-1, 0, +1])  # ticks no eixo y
>>> xticks( [-pi, -pi/2, 0, pi/2, np.pi])  # ticks no eixo x
>>> # pon etiquetas os ticks
>>> xticks([-pi, -pi/2, 0, np.pi/2, np.pi],
    ... ['$-\pi$', '$-\pi/2$', '$0$', '$+\pi/2$', '$+\pi$'])
>>> clf()  # limpa o contido dunha venta de graficos
>>> plot(X, C, color="red", linewidth=2.0, linestyle="-", label="coseno")
>>> plot(X, S, color="green", linewidth=1.0, linestyle=":", label="seno")
>>> legend(loc='upper left')  # pon unha lenda no grafico para cada curva na posicion indicada
```

Podes usar unha versión simplificada das cores, tipo de liña e símbolo da seguinte forma:

```
>>> x = linspace(-pi,pi,100)
>>> y = sin(2*pi*x)
>>> clf(); plot(x, y, 'bs-')  # azul (b), cadrado (s), liña continua (-)
>>> clf(); plot(x, y, 'o')  # so símbolo círculo (o) sen liña
>>> clf(); plot(x, y, 'g')  # so liña de cor verde
>>> clf(); plot(x, y)  # por defecto so liña azul continua
```

Outras cores son: m (maxenta), c (cyan=celeste), k (negro), y (amarelo). Outros tipos de liña: – (segmentada), : (punteada), -. (segmentada-punteada). Outros símbolos son: ^, v, *, d (diamante), +.

Gráficos de liñas, histogramas, gráficos de barras e gráficos de erros.

```
>>> x = [3,5,8,2,3,6,4,7,3,6,9,4,3,2,6] # lista de numeros
>>> hist(x)  # histograma de x
>>> clf()  # limpa o contido da figura
>>> hist?  # podes ver a axuda da funcion hist no entorno interactivo
>>> x = linspace(0, 2*pi, 100) # vector con 100 elementos no intervalo [0,2pi]
>>> fill(x,sin(x), 'r')  # grafico de linhas recheo
>>> fill(x,sin(3*x), 'b', alpha=0.5)  # outro grafico de linhas
>>> grid() # pon enreixado o grafico
>>> grid(False)  # quita o enreixado do grafico
>>> hold(False)  # desactiva o mantemento do grafico
>>> # graficos de barras
>>> x = range(6) # lista con 6 elementos
>>> y = [3,4,2,6,4,8]  # lista con 6 elementos
>>> bar(x,y)  # grafico de barras vertical
>>> barh(x,y) # grafico de barras horizontal
>>> erroy = [0.2,0.3,0.5,0.1,0.2, 0.7]  # lista de erros en y
>>> errox=[0.1,0.1,0.3,0.3,0.4, 0.1]  # lista de erros en x
>>> errorbar(x, y, errox, erroy)  # grafico de erros
>>> # grafico de erros establecendo cores, simbolos e grosor de linha
>>> errorbar(x, y,erroy, errox, fmt='go', ecolor='blue', elinewidth=1.25)
```

Realización de cálculos simbólicos usando SymPy. Podes consultar a documentación de SymPy en `http://docs.sympy.org`:

```
>>> from sympy import *
>>> x,a,n = symbols('x a n')
>>> init_printing(use_unicode=True) # mostra as respostas en 2D.
>>> limit(sin(a*x)/x, x, 0)   # limite en x=0 de sin(ax)/x
a
>>> Limit(sin(a*x)/x,x,0,dir='+-') # representa en 2D o limite (bidireccional)
Limit(sin(a*x)/x, x, 0, dir='+-')  # dir='+' (defecto),'-','+-'
>>> limit(n**2/(n**2+1),n,oo)  # limite dunha sucesion: n^2/(n^2+1)
1
>>> diff(exp(x**2), x)  # deriva exp(x^2)
2*x*exp(x**2)
>>> integrate(exp(-x**2), x)  # integra exp(-x^2)
pi**(1/2)*erf(x)/2
>>> integrate(exp(-x**2), (x, 0, oo))  #integral definida de exp(-x^2) en [0,inf)
pi**(1/2)/2
>>> solve(a**2*x**2/(a**2 + x**2)-1,x)  # resolve a ecuacion a^2 x^2/(a^2 + x^2) = 1
[-(a**2/((a - 1)*(a + 1)))**(1/2), (a**2/((a - 1)*(a + 1)))**(1/2)]
# se solve() retorna [] ou activa unha excepcion NotImplementedError
# isto non significa que non existan solucions, simplemente non as atopou.
>>> b,c=symbols('b c')
>>> solve(a*x**2+b*x+c, x)
[(-b + sqrt(-4*a*c + b**2))/(2*a), -(b + sqrt(-4*a*c + b**2))/(2*a)]
>>> s=solve(a*x**2+b*x+c, x)
>>> s[0]
(-b + sqrt(-4*a*c + b**2))/(2*a)
>>> s[1]
-(b + sqrt(-4*a*c + b**2))/(2*a)
>>> s[0].subs([(a,1), (b,1), (c,1)])
```

```
-1/2 + sqrt(3)*I/2
>>> s[0].subs([(a,1), (b,1), (c,1)]).evalf()
-0.5 + 0.866025403784439*I
>>> expr = exp(sin(x))
>>> expr.series(x, 0, 10)  #expande sin(x) en serie de Taylor de orde 10 a en torno a 0
1 + x + x**2/2 - x**4/8 - x**5/15 - x**6/240
  + x**7/90 + 31*x**8/5760 + x**9/5670 + O(x**10)
>>> series(exp(sin(x)), x, 0, 10)
1 + x + x**2/2 - x**4/8 - x**5/15 - x**6/240
  + x**7/90 + 31*x**8/5760 + x**9/5670 + O(x**10)
>>> Sum(1/n**2, (n,1,oo)) # deixa indicada a suma dunha serie
Sum(n**(-2), (n, 1, oo))
>>> Sum(1/n**2, (n,1,oo)).doit() # calcula a suma da serie
pi**2/6
>>> Sum(1/n**2,(n,1,oo)).evalf()  # calcula sum_{n=1}^inf (1/n^2) con numeros decimais
1.64493406684823
>>> M = Matrix([[1, 0, 1, 3], [2, 3, 4, 7], [-1, -3, -3, -4]])  # define unha matriz
>>> M
[ 1,  0,  1,  3]
[ 2,  3,  4,  7]
[-1, -3, -3, -4]
>>> M.rref()   # convirte en triangular superior como no metodo de eliminacion gaussiana
([1, 0,   1,   3]
 [0, 1, 2/3, 1/3]
 [0, 0,   0,   0], [0, 1])
>>> M = Matrix([[3, -2,  4, -2], [5,  3, -3, -2], [5, -2,  2, -2], [5, -2, -3,  3]])
>>> M.eigenvals()  # calcula autovalores
{-2: 1, 3: 1, 5: 2}  # autovalor -2 con multiplicidade 1, ...
>>> M.eigenvects()
[(3, 1, [[1]  # autovector [1,1,1,1] asociado a autovalor 3 con multiplicidade 1
[1]
[1]
[1]]),
 (-2, 1, [[0]
[1]
[1]
[1]]),
 (5, 2, [[1]
[1]
[1]
[0], [ 0]
[-1]
[ 0]
[ 1]])]
>>> P, D = M.diagonalize()  # diagonaliza M, calculando as matrices P, D que verifican M=PDP^{-1}
>>> P   # matriz de permutacions
[1, 0, 1,  0]
[1, 1, 1, -1]
[1, 1, 1,  0]
[1, 1, 0,  1]
>>> D   # matriz diagonal
[3,  0, 0, 0]
[0, -2, 0, 0]
[0,  0, 5, 0]
[0,  0, 0, 5]
>>> P*D*P**-1 == M  # comproba que PDP^-1 = M
True
```

```
>>> p=x**4 - 5*x**3 + 2*x**2 + 20*x - 24
>>> factor(p)   # factoriza p en factores primos
(x - 5)**2*(x - 3)*(x + 2)
>>>  roots(p) # raices dun polinomio como
{-2: 1, 3: 1, 5: 2}
>>> roots(x**4-4)
 {-sqrt(2)*I: 1, sqrt(2): 1, -sqrt(2): 1, sqrt(2)*I: 1}
>>> zeros(3) # matriz de ceros
>>> Matrix([
[0, 0, 0],
[0, 0, 0],
[0, 0, 0]])
>>> zeros(2,4)
>>> Matrix([
[0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0]])
>>> ones(2,3) # matriz de uns
>>> Matrix([
[1, 1, 1],
[1, 1, 1]])
>>> eye(3) # matriz identidad
>>> Matrix([
[1, 0, 0],
[0, 1, 0],
[0, 0, 1]])
>>> f = lambdify(x, x**2) # convirte unha expresion nunha funcion lambda
>>> f(2)
4
>>> f = lambdify(x, sqrt(x))
>>> f(4)
2.0
>>> f = lambdify((x, y), sin(x*y)**2)
>>> f(0, 5)
0.0
```

Traballo a desenvolver polo alumnado

Realiza por orde os seguintes exercicios utilizando o paquete matplotlib:

1. Representa gráficamente $y = x^2 e^{-x/10} \operatorname{sen} 10x$ con $0 \leq x \leq 10$, rede (Grid), e títulos de eixos `Velocidade (m/s)` e `Aceleración (m/s2)`.
2. Representa a curva en forma paramétrica $x(t) = t \cos 10t, y(t) = t^2 \operatorname{sen} 10t$, con $t = 0, \ldots, 10$ e 1000 puntos.
3. Xera un vector de números aleatorios co comando `rand` no paquete `numpy.random` e mostra un histograma con 50 intervalos.
4. Representa o vector $x_i = \arctan\left(\dfrac{i^2-1}{i^2+1}\right)$, con $i = -10, -9, \ldots, 10$, e con barras de erro de cor vermella con alturas dadas por $e_i = \operatorname{sen} x_i/10$.

Realiza por orde os seguintes exercicios utilizando o paquete sympy:

1. Dadas as seguintes matrices:

$$\mathbf{MI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

calcula:

a) A matriz inversa de **MI-A**

b) $(\mathbf{MI} - \mathbf{A})^4$

c) $\dfrac{\mathbf{MI} + \mathbf{A}}{\mathbf{MI} - \mathbf{A}}$

2. Diagonaliza, calcula os autovalores, autovectores, determinante e matriz inversa de:

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 3 & 5 & 6 \\ -3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{\pi}{x}\right)^x$

4. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right)$

5. $\displaystyle\int \frac{x - 5}{(x-1)(x+1)^2} dx$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x dx$: calcúla o seu valor simbólico e en punto flotante, co número de decimais por defecto e con 5 decimais.

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$

8. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx.$

9. Calcula o polinomio de Taylor de orde 10 de $f(x) = \operatorname{sen}\tan x - \tan\operatorname{sen} x$ en torno a $x = 0$.

10. Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z - t &= 1 \\ x - 3y - 2z + t &= 6 \\ 3x + 2y - 3z + 2t &= 9 \\ x - y - z + 2t &= 10 \end{aligned}$$

11. Factoriza o polinomio $x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$.

12. Resolve a ecuación $x^3 - 5ax^2 + x - 1 = 0$ (en función de a).

Sesión 4 : Primeros programas

Traballo en clase

En Python tamén podemos executar programas (os programas de Python son arquivos de texto con extensión `.py`). Para crear un programa podes utilizar:

- SPYDER: utilizar o editor que trae incorporado. A apariencia de SPYDER é igual en calquer sistema operativo. Opción recomendada se se usa Windows ou Mac.
- Se usas Linux sen SPYDER, usa calquer editor de texto (preferiblemente que teña a sintaxe de Python resaltada como `gedit` ou `kate`).

1. **Programa básico con entrada e saída de datos**. Escribe o programa nun editor de texto (por exemplo `gedit`) e gárdao cun nome e extensión `.py`. Para os nomes dos arquivos utiliza só caracteres alfanuméricos sen espacios en branco nen símbolos raros. Escribe un programa chamado `radio.py` que pida por teclado que se introduza un radio e calcula o perímetro da circunferencia, a área do círculo e o volume da esfera.

   ```
   #!/usr/bin/python3
   from math import pi
   radio = float(input("Introduce o radio: "))
   perimetro = 2 * pi * radio
   area = pi * radio * radio
   volumen = 4 * pi * radio ** 3/3
   print("Perimetro ", perimetro)
   print("Area ", area)
   print("Volumen ", volumen)
   ```

   Para executar o programa, unha vez escrito, tes varias alternativas:

   a) Windows: desde un terminal co comando `python.exe radio.py`

   b) Linux:

   1) Dende o intérprete de Python(executando o comando `ipython3`) tecleando `run radio.py`.
   2) Dende a terminal no directorio do programa, executando `python3 radio.py`.
   3) Se lle das permisos de execución o arquivo `radio.py` co comando `chmod u+x radio.py`, podes executalo dende a terminal coa orde `./radio.py` ou `radio.py` se tes incluido o directorio actual (`.`) na variábel de entorno `PATH`. Para que esta alternativa funcione hai que incluir a primeira liña no arquivo `radio.py` que indica o directorio onde está o intérprete de Python. Nos sistemas linux normalmente está no directorio `/usr/bin`.

   c) SPYDER: independentemente do sistema operativo.

   1) Utilizando o botón `run`.
   2) Como en Linux desde a ventá do intérprete.

   Nós executaremos normalmente dende o intérprete porque así podemos ver os valores das variábeis en caso de erro, o que facilita a depuración. Os valores das variables do programa tamén se poden observar en SPYDER na ventá de exploración de variables. De todos modos, cando o programa xa está correcto, as execucións desde o terminal son máis rápidas e cómodas.

2. **Programa básico con sentenzas de selección**. Escribe un programa que pida por teclado que introduza un número enteiro e devolva unha mensaxe informando se o número é par ou impar.

   ```
   #!/usr/bin/python3
   x = int(input("Introduce un numero enteiro: "))
   resto = x % 2
   if resto > 0:
   ```

```
    print(x, "e impar")
else:
    print(x, "e par")
```

Outra versión:

```
#!/usr/bin/python3
x = int(input("Introduce un numero enteiro: "))
if x % 2:
    print(x, "e impar")
else:
    print(x, "e par")
```

3. **Ecuación de segundo grao**. Escribe un programa que lea os coeficientes (reais) dunha ecuación de segundo grao $ax^2 + bx + c = 0$ e calcule as súas solucións segundo a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$

O seguinte programa usa o módulo `Tkinter` para o desenvolvemento de interfaces gráficas (podes descargar o programa no seguinte **enlace** e executalo). Hai partes do programa que non entendes, pero simplemente é un exemplo para ver como se pode construir unha interface gráfica. A ventá que aparece ao executar este programa pode verse na figura 1, e permite introducir os coeficientes a, b, c, e mostrar as solucións x_1 e x_2.

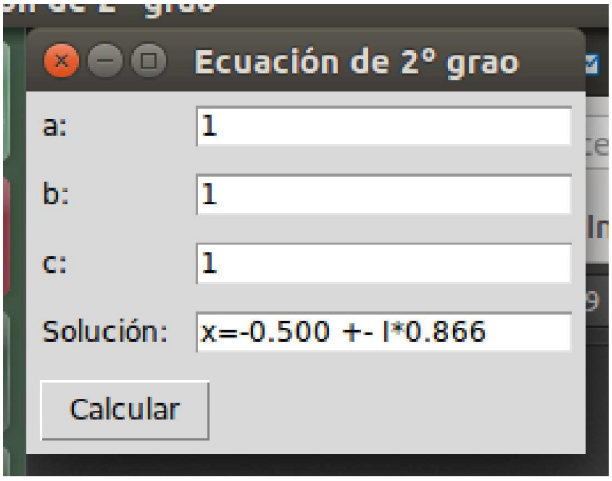


Figura 1: Interface gráfica para a cálculo dunha ecuación de segundo grao.

```
#!/usr/bin/python3
from tkinter import *
from math import *
fields=('a','b','c',u'Solución')
def calcular(entries):
        a=float(entries['a'].get())
        b=float(entries['b'].get())
        c=float(entries['c'].get())
        if a==0:
                if b==0:
                        if c==0:
                                solucion='IR'
                        else:
                                solucion='∅'
```

```
                else:
                        solucion='%.3f'%(-c/b)
        else:
                d=b*b-4*a*c;a2=2*a;rd=sqrt(abs(d))
                if d<0:
                        re=-b/a2;im=rd/a2;
                        solucion='x=%.3f +- I*%.3f'%(re,abs(im))
                elif d==0:
                        solucion='x1=x2=%.3f'%(-b/a2)
                else:
                        solucion='x1=%.3f x2=%.3f'%((-b-rd)/a2,(-b-rd)/a2)
        entries[u'Solución'].delete(0,END)
        entries[u'Solución'].insert(0,solucion)

def makeform(root, fields):
        entries = {}
        for field in fields:
                row = Frame(root)
                lab = Label(row, width=8, text=field+": ", anchor='w')
                ent = Entry(row)
                ent.insert(0,"1")
                row.pack(side=TOP, fill=X, padx=5, pady=5)
                lab.pack(side=LEFT)
                ent.pack(side=RIGHT, expand=YES, fill=X)
                entries[field] = ent
        return entries

if __name__ == '__main__':
        root = Tk()
        root.title(u'Ecuación de 2º grao')
        ents = makeform(root, fields)
        b1 = Button(root, text='Calcular',
                        command=(lambda e=ents: calcular(e)))
        b1.pack(side=LEFT, padx=5, pady=5)
        root.mainloop()
```

4. **Programa básico con sentenzas de iteración**. Escribe un programa que lea un número n por teclado e logo lea n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e calcule a súa media e producto:

$$media = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i, \qquad producto = \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{2}$$

Solución utilizando un bucle `while`:

```
#!/usr/bin/python3
n = int(input("Introduce numero de elementos: "))
i = 0
media = 0.0
producto = 1.0
while i < n:
  xi = float(input("Introduce elemento: "))
  media = media + xi
  producto = producto * xi
  i = i + 1
media = media / n
print("Media=", media)
print("Producto=", producto)
```

Solución utilizando un bucle `for`:

```
#!/usr/bin/python3
n = int(input("Introduce numero de elementos: "))
media = 0.0
producto = 1.0
for i in range(n):
  xi = float(input("Introduce elemento: "))
  media = media + xi
  producto = producto * xi
media = media / n
print("Media=", media)
print("Producto=", producto)
```

5. **Programa básico con argumentos en liña de comandos**. Este programa (que podes chamar `argumentos.py`) mostra por pantalla os argumentos cos que se executou o programa. Estos argumentos son as cadeas de caracteres que se escriben logo do nome do programa cando se executa dende a terminal de comandos, por exemplo:

   `python3 argumentos.py argumento1 10 5.3`

   ou

   `argumentos.py argumento1 10 5.3`

   (supoñendo que fixeches antes o `chmod u+x argumentos.py` para darlle permiso de execución). Se executas o programa dende `ipython3`, podes executar `run argumentos.py argumento1 10 5.3`. O primeiro argumento que mostra sempre é o nome do programa. O programa debe mostrar as cadeas de caracteres argumentos.py e argumento1, e os números 10 e 5.3, ademáis da súa suma.

```
#!/usr/bin/python3
from sys import *
# argv=['argumentos.py', 'argumento1', 4, 5.6]
n=len(argv)
print("Este programa ten", n, " argumentos en linha de comandos :")
for i in range(n):
    print(" argumento ", i+1, ":", argv[i])
n=int(argv[2]) # convirte de cadea de caracteres a enteiro
x=float(argv[3]) # convirte de cadea de caracteres a enteiro
print(n+x)
```

Traballo a desenvolver polo alumnado

1. Escribe un programa que calcule a distancia entre un punto $\mathbf{v} = (x_0, y_0, z_0)$ e un plano π dado pola ecuación $ax + by + cz + d = 0$. A distancia entre $\mathbf{v}$ e π pódese calcular como:

$$D(\mathbf{v}, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\|\mathbf{w}\|} \tag{3}$$

   O valor absoluto é coa función `abs(...)`; ademáis, $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. O programa debe ler por teclado os valores $a, b, c, d, x_0, y_0, z_0$.

2. **Ecuación de primeiro grao**. Escribe un programa que lea os coeficientes reais dunha ecuación de primeiro grao $ax + b = 0$ e calcule a solución segundo a fórmula:

$$x = \frac{-b}{a} \tag{4}$$

   Debes ter en conta que so existe solución única cando a é distinto de 0 (que debes controlar cunha sentenza de selección). Se tes dificultades podes consultar a solución detallada no libro: *Introdución a programación en Python* de Andrés Marcial e Isabel Gracia.

3. **Ecuación de segundo grao**. Escribe un programa que lea os coeficientes (reais) dunha ecuación de segundo grao $ax^2 + bx + c = 0$ e calcule as súas solucións segundo a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5}$$

Sexa $d = b^2 - 4ac$ o discriminante. Se $d < 0$, entón hai dúas solucións complexas conxugadas $x = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{-d}}{2a}$, onde i é a unidade imaxinaria $i = \sqrt{-1}$. Se $d = 0$, entón hai dúas solucións reais iguais $x = \frac{-b}{2a}$. Se $d > 0$ hai dúas solucións reais distintas $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, entón temos unha ecuación de 1^o grao con solución $x = -c/b$. Se $a = b = c = 0$ todo $x \in \mathbf{R}$ é solución, e se $a = b = 0, c \neq 0$ non hai solución. Para comprobar que o programa funciona correctamente, proba os seguintes exemplos:

a	b	c	N^o solucións	Solucións
1	1	1	2 complexas	$x = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$
1	-2	1	2 reais iguais	$x = 1$
1	0	-1	2 reais distintas	$x = \pm 1$
0	1	-1	ec. 1^o grao	$x = 1$
0	0	0	∞	$x = \mathbb{R}$
0	0	1	0	$x = \varnothing$

Se tes dificultades podes consultar a solución detallada no libro: *Introdución a programación en Python* de Andrés Marcial e Isabel Gracia.

```
#!/usr/bin/python3
# resolve unha ec. de segundo grao ax^2+bx+c=0
from math import *
a=float(input('a= '))
b=float(input('b= '))
c=float(input('c= '))

if 0 == a: #  ec. de primer grao bx+c=0
        if 0 != b:
                print('Unha solucion real x=', -c/b)
        else:
                if 0 == c:
                        print('Existen multiples solucions')
                else:
                        print('Non existe solucion')
else:
        d=b*b-4*a*c # discriminante
        if d > 0:
                print('Duas solucions reais')
                print('x1= ', (-b+sqrt(d))/(2*a), ' x2=', (-b-sqrt(d))/(2*a))
        elif d <0:
                print('Duas solucions complexas conxugadas')
                re= -b/(2*a) # parte real
                im=sqrt(-d)/(2*a)
                print('x1=', re, '+I ', im, ' x2=', re, '-I', im)
        else:
                print('Unha solucion real dobre')
                print('x=', -b/(2*a))
```

Sesión 5 : Listas e sentenzas de iteración

Traballo en clase

1. Escribe un programa que lea do teclado dous vectores **v** e **w** n-dimensionais con valores reais e calcule o produto escalar (ou interior) de ambos dado pola ecuación:

$$\mathbf{vw} = \sum_{i=0}^{n-1} v_i w_i \tag{6}$$

   Existen varias alternativas para a súa solución. Versión creando listas baleiras e engadindo elementos a lista en cada iteración:

```
#!/usr/bin/python3
n = int(input("Numero de elementos= "))
v = []; w = []  # crea listas baleiras
pescalar = 0
# ler listas do teclado e calculo
for i in range(n):
  vi = float(input("Introduce elemento de v: "))
  wi = float(input("Introduce elemento de w: "))
  v = v + [vi]
  w = w + [wi]
  pescalar = pescalar + v[i] * w[i]
print("Vector v=", v)
print("Vector w=", w)
print("Producto escalar=", pescalar)
```

   Versión creando unha lista do tamaño que necesitamos.

```
#!/usr/bin/python3
n = int(input("Numero de elementos= "))
v = [0] * n # crea lista de n elementos inicializada con 0
w = [0] * n
pescalar = 0
# ler listas do teclado e calculo
for i in range(n):
  v[i] = float(input("Introduce elemento de v: "))
  w[i] = float(input("Introduce elemento de w: "))
  pescalar = pescalar + v[i] * w[i]
print("Vector v=", v)
print("Vector w=", w)
print("Producto escalar=", pescalar)
```

   Tamén se pode usar a función `dot(v,w)` (que realiza o producto escalar de dúas listas) no paquete `numpy`:

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
v=float_(input('v? ').split())  # le cadea, divide en valores e convirte a float
w=float_(input('w? ').split())  # introduce valores separados por espazos
print("Vector v=", v)
print("Vector w=", w)
print("Producto escalar=", dot(v,w))
```

2. **Sumatorio dobre**. Escribe un programa que lea por teclado dous vectores n-dimensionais **v** e **w** e calcule:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i} v_i w_j \tag{7}$$

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
v=float_(input('v? ').split())
w=float_(input('w? ').split())
print("Vector v=", v)
print("Vector w=", w)
resul = 0
n = len(v)
for i in range(n):
    aux = 0
    for j in range(i+1):
        aux = aux + w[j]
    print("aux= ", aux)
    resul = resul + v[i] * aux
print("Resultado=", resul)
```

Unha alternativa computacionamente máis eficiente:

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
v=float_(input('v? ').split())
w=float_(input('w? ').split())
n = len(v)
resul = 0
aux = 0
for i in range(n):
    aux = aux + w[i]
    resul = resul + v[i] * aux
print("Resultado=", resul)
```

Unha alternativa vectorizada sería:

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
v=float_(input('v? ').split())
w=float_(input('w? ').split())
n = len(v)
resul = 0
for i in range(n):
    resul = resul + v[i] * sum(w[:i+1])
print("Resultado=", resul)
```

Usando a función `zip(v,w)`, pódese reducir aínda máis o programa:

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
v=float_(input('v? ').split())
w=float_(input('w? ').split())
s1=0;s2=0
for i,j in zip(v,w):
    s2+=j;s1+=i*s2
print("Resultado=",s1)
```

3. **Representación gráfica dende un programa**. Escribe un programa que calcule a posición $x(t)$, velocidade $v(t)$ e aceleración $a(t)$ dun móvil en movemento armónico, dado por:

$$x(t) = b\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta) \tag{8}$$
$$v(t) = b\omega\cos(\omega t + \theta) \tag{9}$$
$$a(t) = -b\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta) \tag{10}$$

sendo $\omega = \pi/10$ radiáns/s, $\theta = \pi/2$ radiáns, $b = 2.5\ m/s^2$ para tempos $0 \leq t \leq 100$ s. separados 1 s. entre eles. Almacena os resultados en listas e representa gráficamente tódalas listas. Garda a gráfica no arquivo `figuraarmonico.png`. Tes que obter a gráfica da figura 2.

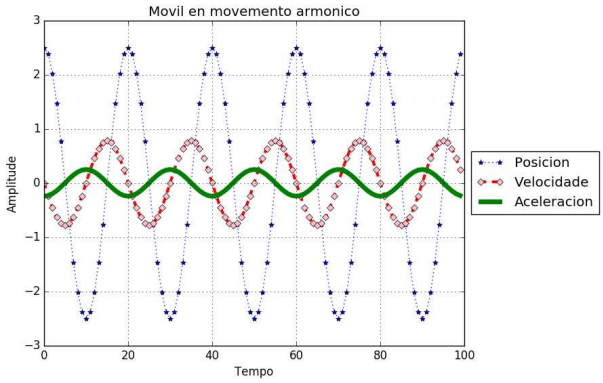


Figura 2: Movimiento armónico simple.

Solución utilizando listas de `python`.

```
#!/usr/bin/python3
from math import *
from matplotlib.pyplot import *
THETA = pi / 2  # constante
A = 2.5  # constante
OMEGA = pi / 10
n = 100
x = [0.0] * n; v = [0.0] * n; a = [0.0] * n
t = range(100)
for i in t:
  x[i] = A * sin(OMEGA*i + THETA)
  v[i] = A * OMEGA * cos(OMEGA*i + THETA)
  a[i] = - A * OMEGA * OMEGA * sin(OMEGA*i + THETA)
clf()
plot(t, x, 'b*:', label="Posicion")
plot(t, v, color="red",  linestyle="--", linewidth=3.0, markersize=5, \
markerfacecolor="pink",  marker="D",  label="Velocidade")
plot(t, a, color="green", linestyle="-", linewidth=5.0, \
label="Aceleracion")
xlabel("Tempo")
ylabel("Amplitude")
title("Movil en movemento armonico")
grid()
# para lenda dentro da caixa de debuxado
#legend(loc='upper center', shadow=True)
# para situar a lenda fora da caixa do grafico
lgd=legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
```

```
savefig('figuraarmonico.png', bbox_extra_artists=(lgd,), bbox_inches='tight')
show() # visualiza a figura
```

A barra \ que hai en algunhas liñas significa que a liña de código non rematou. As cadeas de caracteres nos comandos `title` e outros poden levar tildes e eñes, pero no texto non as levan por problemas co LaTeX.

Se utilizas o módulo `numpy`, o programa simplifícase a:

```
#!/usr/bin/python3
from math import *
from matplotlib.pyplot import *
from numpy import *
THETA = pi / 2  # constante
A = 2.5  # constante
OMEGA = pi / 10
t=arange(1,101,1)
x = A * sin(OMEGA*t + THETA)
v = A * OMEGA * cos(OMEGA*t + THETA)
a = - A * OMEGA * OMEGA * sin(OMEGA*t + THETA)
clf()
plot(t, x, 'b*:', label="Posicion")
plot(t, v, color="red",  linestyle="--", linewidth=3.0, markersize=5, \
markerfacecolor="pink",  marker="D",  label="Velocidade")
plot(t, a, color="green", linestyle="-", linewidth=5.0, \
label="Aceleracion")
xlabel("Tempo")
ylabel("Amplitude")
title("Movil en movemento armonico")
grid()
# para lenda dentro da caixa de debuxado
#legend(loc='upper center', shadow=True)
# para situar a lenda fora da caixa do grafico
lgd=legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
savefig('figuraarmonico.png', bbox_extra_artists=(lgd,), bbox_inches='tight')
show() # visualiza a figura
```

Se queres poñelo en tres gráficas distintas, sería co `subplot()`:

```
#!/usr/bin/python3
from math import *
from matplotlib.pyplot import *
theta= pi/2; b=2.5; w=pi/10; n=100
x = [0.0]*n; v = [0.0] * n; a = [0.0] * n
t = range(100)
for i in t:
    x[i] = b * sin(w*i + theta)
    v[i] = b * w * cos(w*i + theta)
    a[i] = - b * w * w * sin(w*i + theta)

clf()
subplots_adjust(hspace=0.4)
subplot(311)
plot(t, x, 'b*:')
xlabel("Tempo (s)"); ylabel("Amplitude (m)"); grid(True)
subplot(312)
plot(t, v, color="red",  linestyle="--", linewidth=3.0, markersize=5, \
markerfacecolor="pink",  marker="D")
```

```
xlabel("Tempo (s)"); ylabel("Velocidade (m/s)"); grid(True)
subplot(313)
plot(t, a, color="green", linestyle="-", linewidth=5.0)
xlabel("Tempo (s)"); ylabel(u"Aceleracion (m/s^2)")
grid(True)
show(True)
```

4. **Medida do tempo de execución dun programa**: escribe un programa que lea por teclado un número enteiro n e defina unha lista `x` de n elementos con valores $x_i = i^2$, con $i = 1, \ldots, n$, medindo o tempo de execución para valores altos de n. Esta lista `x` pódese crear das seguintes formas:

   a) Usando un bucle `while` e engadindo elementos á lista con `x=x+[i*i]`.

   b) Usando un bucle `while` e engadindo elementos á lista co método `append()`.

   c) Usando `while` e creando a lista ao comezo do bucle con `x=[0]*n`.

   d) Usando un bucle `for` e creando a lista do mesmo xeito.

   e) Vectorizando o bucle co `numpy`.

   Usa, por exemplo, $n = 50000$ iteracións. Os valores concretos de tempo dependen de cada ordenador e diferentes execucións, pero, seguramente, a primeira opción é a máis lenta é a última a máis rápida.

```
#!/usr/bin/python3
from time import *
from numpy import *
n = int(input("Numero iteracions: "))

print('Bucle while engadindo elementos a lista')
inicio = process_time(); x=[]; i=0
while i < n:
  x=x + [i*i]
  i=i+1
fin = process_time()
print("Tempo transcurrido: %f" % (fin - inicio))

print('Bucle while engadindo elementos con append()')
inicio = process_time(); y=[]; i=0
while i < n:
  y.append(i*i)
  i=i+1
fin = process_time()
print("Tempo transcurrido: %f" % (fin - inicio))

print('Bucle while creando unha lista con n elementos')
inicio = process_time(); z=[0]*n; i=0
while i < n:
  z[i]=[i*i]
  i=i+1
fin = process_time()
print("Tempo transcurrido: %f" % (fin - inicio))

print('Bucle for con lista de n elementos')
inicio = process_time(); v=[0]*n
for i in range(n):
  v[i]=[i*i]
fin = process_time()
print("Tempo transcurrido: %f" % (fin - inicio))

print('Vectorizado co numpy')
```

```
inicio = process_time()
v=arange(n)**2
fin = process_time()
print("Tempo transcurrido: %f" % (fin - inicio))
```

Traballo a desenvolver polo alumnado

1. Escribe un programa que lea número enteiro n e un vector $\mathbf{v}$ de dimensión n. O programa debe calcular a norma (módulo) de $\mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} v_i^2} \tag{11}$$

2. Escribe un programa que lea dous vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de dimensión n por teclado e calculen a súa distancia $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ definida como:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i)^2} \tag{12}$$

3. Escribe un programa que lea por teclado un número enteiro n e un vector $\mathbf{v}$ de dimensión n , e calcule o vector transformado $\mathbf{w}$, tamén de dimensión n, definido por:

$$w_i = \sum_{j=0}^{i-1} v_j, \quad i = 0, \ldots, n-1 \tag{13}$$

   Proba con $n = 5$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4, 5)$ e tes que obter $\mathbf{w} = (1, 3, 6, 10, 15)$.

4. Escribe un programa que simule a altura $h(t)$, velocidade $v(t)$ e aceleración $a(t)$ do salto feito por Felix Baumgartner dende unha altura de 39045m, a unha velocidade superior á do son (detalles en este **enlace**). Nesta web supoñen gravidade constante g=9.8m/s^2, m=120 kg (paracaidista e traxe), unha forza de rozamento contra o aire $F_r(t)$, altura $h(t + \Delta t)$, velocidade $v(t + \Delta t)$ e aceleración $a(t + \Delta t)$ dados polas ecuacións seguintes (nas que $\Delta t = 1$ seg.):

$$k(t) = \frac{AC(t)\rho(t)}{2} \tag{14}$$

$$F_r(t) = -k(t)v(t)^2 \tag{15}$$

$$a(t+1) = g - \frac{F_r(t)}{m} \tag{16}$$

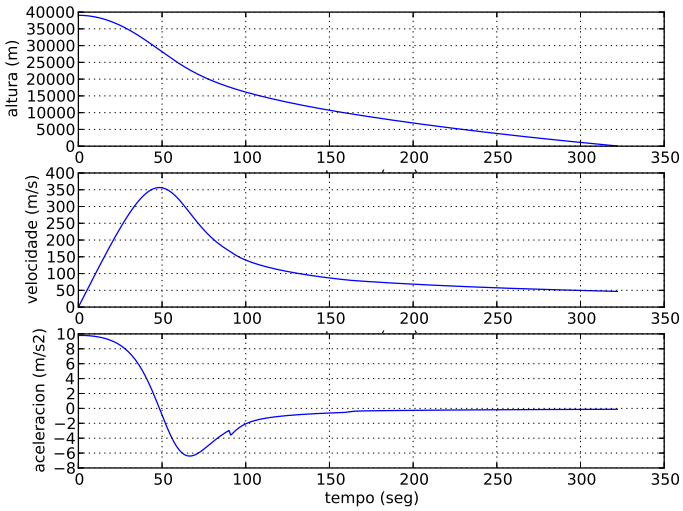
$$v(t+1) = v(t) + \frac{a(t+1) + a(t)}{2} \tag{17}$$

$$h(t+1) = h(t) - \frac{v(t+1) + v(t)}{2} \tag{18}$$

   O parámetro $C(t)$ toma o valor C=0.69 para t <90 seg. e C=0.73 máis adiante. Debes supor a seguinte densidade $\rho(h)$ do aire (onde $h = h(t)$, é dicir, depende do tempo t):

$$\rho(h) = \begin{cases} Ae^{-h/Z_1} & h < h_0 \\ B\exp\left(-\dfrac{h-h_0}{Z_2}\right) & h \geq h_0 \end{cases}$$

   Onde A=1.225 kg/m^3, B= 0.4136 kg/m^3, Z_1=9208 m, Z_2=6494 m e h_0= 10000m. Tes que usar $h(0)$=39045m, $v(0)$=0 m/s e $a(0) = g$ m/s^2. O programa debe representar $h(t), v(t), a(t)$ para $t = 1, 2, 3, \ldots$ seg. mentres que $h > 0$.




```
#!/usr/bin/python3
from matplotlib.pylab import *
A=1.225; B= 0.4136; Z1=9208; Z2=6494; h0=10000; g=9.8; m=120
n=1000; h=[0]*n; v=[0]*n; a=[0]*n; Fr=[0]*n;
h[0]=39045; v[0]=0; a[0]=g; t=0
for t in range(n):
    if h[t] < h0:
        rho=A*exp(-h[t]/Z1)
    else:
        rho=B*exp(-(h[t]-h0)/Z2)
    if t<90:
        C=0.69
    else:
        C=0.73
    k=rho*A*C/2
    Fr[t]=k*v[t]**2
    a[t+1]=g-Fr[t]/m
    v[t+1]=v[t]+(a[t+1]+a[t])/2
    h[t+1]=h[t] - (v[t+1] + v[t])/2
    if h[t+1] < 0:
        break
    t=t+1
u=range(t)
clf()
subplot(3,1,1)
plot(u,h[0:t],'b-'); xlabel("tempo (seg)");
ylabel("altura (m)"); grid(); show(False)
subplot(3,1,2)
plot(u,v[0:t],'b-'); xlabel("tempo (seg)");
ylabel("velocidade (m/s)"); grid(); show(False)
subplot(3,1,3)
plot(u,a[0:t],'b-'); xlabel("tempo (seg)");
ylabel("aceleracion (m/s2)"); grid(); show(False)
show(True)
```

5. Realiza un indicador de progreso da porcentaxe de programa que se executou.

```
#!/usr/bin/ipython3
n=1000000
for i in range(n):
        print('%5.1f%%' % (100*i/n),end='\r')
```

Sesión 6 : Matrices

Traballo en clase

1. Dada a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

calcula, usando NumPy, o seu determinante, inversa, autovalores e autovectores.

```
>>> from numpy.linalg import *
>>> a=array([[1,2,3],[2,-1,0],[1,0,2]])
>>> det(a)
-7.0000000000000009
>>> inv(a)
array([[ 0.28571429,  0.57142857, -0.42857143],
       [ 0.57142857,  0.14285714, -0.85714286],
       [-0.14285714, -0.28571429,  0.71428571]])
>>> eig(a)
(array([ 3.6624648 , -2.44437482,  0.78191002]), array([[-0.80430281, -0.58045714, -0.58383444],
       [-0.34501185,  0.80374863, -0.6552906 ],
       [-0.48380141,  0.1306049 ,  0.47930321]]))
```

2. **Operacións con matrices**. Escribe un programa que lea por teclado unha matriz cadrada a e calcule:

   a) A suma dos elementos de a dados pola expresión:

$$sa = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} \tag{19}$$

   b) A traza da matriz a dada por:

$$tr = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ii} \tag{20}$$

   c) Sumas dos elementos do triángulo superior dados pola expresión:

$$sts = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} a_{ij} \tag{21}$$

   d) Determine se a matriz é simétrica: $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 0, \ldots, n-1$.

   Visualiza os cálculos na pantalla. Repite o exercicio lendo a matriz desde un arquivo.

   Na introducción de datos polo teclado sempre se poden cometer erros. A xestión dos erros en Python realízase utilizando **excepcións**. As excepcións son erros detectados por Python durante a execución dun programa, e nos que a persoa que programa pode configurar que facer cando se produce o erro. Cando o programa atopa unha situación anómala xera ou lanza un evento (obxeto de tipo `Exception`) informándonos sobre o tipo de problema. Posibles excepcións son: división por cero, arquivo que non existe, etc. Python utiliza a construción `try/except` para capturar e tratar as excepcións. O bloque `try` (intentar) define o fragmento de código no que cremos que se pode producir unha excepción. O bloque `except` (excepción) permite indicar o que se fará se se produce dita excepción para xestionala. Python ten definidas varios tipos de excepcións que se poden consultar en: `https://docs.python.org/3/library/exceptions.html`.

   Solución lendo a matriz desde o teclado:

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
n = -1
while n < 1:
  n = int(input("Introduce tamanho matriz cadrada: "))
a=zeros([n,n])
for i in range(n):
    for j in range(n):
        a[i,j]=float(input("a[%i,%i]: " % (i,j)))
print("matriz="); print(a)

print("Suma elementos de a : ", sum(a))
print("Traza da matriz ", trace(a))
print("Suma elemento triangulo superior= ", sum(triu(a)))
# se consideras que a diagonal principal non se inclue
print("Suma do triangulo superior: ", sum(triu(a))-trace(a))
print("Suma do triangulo superior: ", sum(a-tril(a)))
print("Suma do triangulo superior: ", sum(triu(a)-diag(diag(a))))
if all(a == a.T):
  print("Matriz simetrica")
else:
  print("Matriz non simetrica")
```

Outra forma de ler matrices dende teclado, introducindo o mesmo número de valores en cada fila, e introducindo unha liña baleira cando remates:

```
from numpy import *

print('a? ');a=[]
while True:
    t=float_(input('? ').split())
    if len(t)==0:
        break
    a.append(t)
a=array(a)
print('a=');print(a)
```

Tamén se pode utilizar o método `split()` do obxecto `string` co método `reshape()` do obxecto `array` do módulo `numpy` (neste caso hai que poñer tódolos elementos da matriz na mesma liña):

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
n=0
while n<2:
        n=int_(input('n(>1)? '))
while True:
        try:
                a=int_(input('a? ').split()).reshape(n,n)
                break
        except ValueError:
                print('introduce %i valores' % (n*n))
print("a= ", a)
```

Finalmente, podes ler a matriz escribindo cada fila da mesma nunha liña da terminal co seguinte código:

```
from numpy import *
n=int(input('n? '))
```

```
a=zeros([n,n],'int')
print('a? ')
for i in range(n):
    a[i]=int_(input('').split())
```

Solución lendo a matriz desde un arquivo de texto:

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
nome=input("Introduce nome arquivo: ");
try:
    a=loadtxt(nome);
    if a.ndim == 2: # matriz
        nf = size(a, 0) # numero filas
        nc = size(a, 1) # numero columnas
        if nf == nc: # matriz cadrada
            print("matriz="); print(a)
            print("Suma elementos de a : ", sum(a))
            print("Traza da matriz ", trace(a))
            print("Suma elemento triangulo superior= ", sum(triu(a)))
            # se consideras que a diagonal principal non se inclue
            print("Suma do triangulo superior: ", sum(triu(a))-trace(a))
            print("Suma do triangulo superior: ", sum(a-tril(a)))
            print("Suma do triangulo superior: ", sum(triu(a)-diag(diag(a))))
            if all(a == a.T):
                print("Matriz simetrica")
            else:
                print("Matriz non simetrica")
        else:
            print('Matriz non cadrada')
    else:
        print('Os datos do arquivo non son unha matriz')
except IOError: # erro abrindo arquivo
    print('Erro abrindo o arquivo ', nome)
except ValueError:
    print('Erro lendo o arquivo ', nome)
```

3. **Resolución de sistema de ecuacións lineares mediante Eliminación Gaussiana**. Escribe un programa que resolve un sistema de n ecuacións lineares con n incógnitas empregando o Método de Eliminación Gaussiana. Dado o sistema seguinte:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_{1(n+1)} \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= a_{n(n+1)} \end{aligned}$$

O método de eliminación consiste en empregar as seguintes transformacións:

- Dividir tódolos elementos dunha fila polo mesmo número.
- Sumar a tódolos elementos dunha fila o produto dun escalar polo elemento correspondente doutra fila

para transformar este sistema no seguinte:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_{1(n+1)} \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= a_{2(n+1)} \\ &\ldots \\ a_{nn}x_n &= a_{n(n+1)} \end{aligned} \tag{22}$$

onde os a_{ij} **non** son os iniciais. Concretamente, para cada incógnita $x_i, i = 1, \ldots, n$, restamos as ecuacións $j = i+1, \ldots, n$ menos a ecuación i multiplicada por $l = a_{ji}/a_{ii}$. Deste modo, o coeficiente da incógnita x_i na ecuación j, con $j = i+1, \ldots, n$, pasa a ser nulo. No sistema transformado podemos despexar directamente x_n, sustituir na $(n-1)$-ésima ecuación e despexar x_{n-1} e así sucesivamente ata calcula-las n incógnitas, mediante a fórmula.

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(a_{i(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right) \quad i = n, \ldots, 1 \tag{23}$$

Isto vale se $a_{ii} \neq 0, i = 1, \ldots, n$, pero se $\exists i$ tal que $a_{ii} = 0$, faise o denominado "pivote", consistente en intercambiar a ecuación i-ésima por aquela ecuación p que ten o coeficiente a_{pi} máximo. Proba cos seguintes sistemas:

a) **Sistema compatíbel determinado sen pivote**. Solución: $x = 3, y = -2, z = 5$. Arquivo `sistema_comp_det.txt`:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -3 & -2 & 9 & 40 \\ 4 & 9 & 6 & 24 \end{array}$$

b) **Sistema compatíbel determinado con pivote** (coeficiente nulo na diagonal). Solución: $x = 1, y = 0, z = -1$. Arquivo `sistema_comp_det_pivote.txt`:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}$$

c) **Sistema compatíbel indeterminado**. Ecuacións do subespazo vectorial solución (unha recta de dimensión 1): $x + 3y = 4, z = -11$. Arquivo `sistema_comp_indet.txt` seguinte:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 1 & -3 \end{array}$$

d) **Sistema incompatíbel**. Arquivo `sistema_incomp.txt`:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}$$

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import * # para arrays
from numpy.linalg import * # para determinante
a=array([[0,2,-1],[1,-1,1],[2,0,-2]], 'float')  # coef. sist. ecs.
b=array([[1],[0],[3]], 'float') # termo independente
#a=array([[1,2,1],[-3,-2, 9],[4,9,6]], 'float')  # coef. sist. ecs.
#b=array([[4],[40],[24]], 'float') # termo independente
try:  # alternativa: cargar a matriz dende un arquivo
        nf='sistema_comp_det.txt';t=loadtxt(nf);n=a.shape[0];a=t[:,n];b=t[:,n+1]
except IOError:
        from sys import exit
        exit('arquivo %s non existe'%nf)

ao=a.copy() # copio sistema
bo=b.copy()

ra=matrix_rank(a) # rango de a
ab=hstack([a, b]) # crea matriz ampliada
```

```
rab=matrix_rank(ab) # rango matriz ampliada
nf,nc=ab.shape # devolve numero filas e columnas

if ra == rab: # sistema compatible
  print("Sistema compatible")
  print(ab)
  print("----------------------------------------------------")
  for i in range(nf-1):
    # se a(i,i)= 0 pivotar: intercambia ec. i pola ec. que ten o coef.
    # da variable i maximo
    # para i=n-1 (ultima ec. xa que python comeza a numerar por 0) non fai falla pivotar
    if 0 == a[i,i] and i < nf-1:
      print("0 na ec. ", i)
      imax=argmax(fabs(ab[i+1:nf, i])) # posicion do maximo na columna i
      pos=i + imax +1# posicion absoluta (imax e unha posicion relativa a i)
      # pivote: intercambia ec. i por ec. p
      print("imax= ",imax, "pos= ", pos)
      aux=ab[i].copy(); ab[i]=ab[pos].copy(); ab[pos]=aux.copy()
    print(ab)
    print("----------------------------------------------------")

    if ab[i,i] != 0:
      for j in range(i+1, nf):
          l=ab[j,i]/ab[i,i]
          ab[j]=ab[j]-l*ab[i]
          print(ab)
          print("----------------------------------------------------")

  if ra == nf:
    print('Sistema compatible determinado')
    x=array([0]*nf, 'float')
    x[-1]=ab[-1,-1]/ab[-1, -2]
    for i in range(nf-2, -1, -1):
      x[i]=(ab[i,-1]-sum(ab[i, i+1:nf]*x[i+1:nf]))/ab[i,i]
    print(x)

  else:
    print("Sistema compatible indeterminado")
    print("Solucion de dimension ", nf- ra)
else:
  print("sistema incompatible")
```

Outra solución máis compacta utilizando a descomposición LU que está no paquete `scipy.linalg`.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from scipy.linalg import lu
a=array([[0,2,-1],[1,-1,1],[2,0,-2]], 'float')  # coef. sist. ecs.
b=array([[1],[0],[3]], 'float') # termo independente
#a=array([[1,2,1],[-3,-2, 9],[4,9,6]], 'float')  # coef. sist. ecs.
#b=array([[4],[40],[24]], 'float') # termo independente
ab=hstack([a, b]) # crea matriz ampliada
print(ab)
pl, u = lu(ab, permute_l=True) # triangulacion polo metodo de descomposicion LU
print("Matriz triangular: ")
print(u)
nf,nc=u.shape # devolve numero filas e columnas
```

```
x=array([0]*nf, 'float')
x[-1]=u[-1,-1]/u[-1, -2]
for i in range(nf-2, -1, -1):
    x[i]=(u[i,-1]-sum(u[i, i+1:nf]*x[i+1:nf]))/u[i,i]
print(x)
```

Traballo a desenvolver polo alumnado

1. Repite o primeiro exercicio sen utilizar as funcionalidades de `numpy` para calcular a suma dunha matriz, diagonal principal, triangulo superior e comprobación se unha matriz é simétrica ou non.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from sys import * # para abortar un programa coa funcion exit()
nome=input("Introduce nome arquivo: ");
try:
    a=loadtxt(nome);
    if a.ndim == 2: # matriz
        nf = size(a, 0) # numero filas
        nc = size(a, 1) # numero columnas
        if nf != nc: # matriz cadrada
            raise
    else:
        raise
except IOError: # erro abrindo arquivo
    print('Erro abrindo o arquivo ', nome)
except ValueError:
    print('Erro lendo o arquivo ', nome)
except:
    print('Matriz incorrecta')
    exit() # finaliza o programa

print('Matriz cadrada')
n=size(a,0)
# suma dos elementos da a
suma = 0
for i in range(n):
  suma += sum(a[i])
print("Suma dos elementos de a: ", suma)
# outra alternativa
suma = 0
for i in range(n):
    for j in range(n):
        suma = suma + a[i,j]
print("Suma dos elementos de a: ", suma)
# Traza da matriz
tr = 0
for i in range(n):
  tr = tr + a[i][i]
print("Traza de a= ", tr)
# suma do triangulo superior
st = 0
for i in range(n):
  for j in range(i+1, n):
    st = st + a[i][j]
print("Suma elemento triangulo superior= ", st)
# Suma dos elementos do triangulo superior
```

```
st = 0
for i in range(n):
    st = st + sum(a[i][i+1:n])
print("Suma elemento triangulo superior= ", st)
# determinar se a matriz e simetrica
simetrica = True
for i in range(n):
  for j in range(i+1, n):
    if a[i][j] != a[j][i]:
      simetrica = False
      break
  if simetrica == False:
      break
if simetrica:
  print("Matriz simetrica")
else:
  print("Matriz non simetrica")
# alternativa menos eficiente
nelem=0
for i in range(n):
  for j in range(n):
    if a[i][j] == a[j][i]:
      nelem += 1
if nelem == n*n:
  print("Matriz simetrica")
else:
  print("Matriz non simetrica")
```

2. Escribe un programa lea a matriz cadrada **a** de orde n dende o arquivo `datos.dat`. Proba coa seguinte matriz:

```
 17   24    1    8   15
 23    5    7   14   16
  4    6   13   20   22
 10   12   19   21    3
 11   18   25    2    9
```

A partir desta matriz, o programa debe calcular un vector **v**, de dimensión $2n-1$, cos seus elementos v_k, con $k = 0, \ldots, 2n-2$, dados pola seguinte expresión:

$$v_k = \sum_{i=l}^{m-1} a_{i(k-n+i+1)}, \quad k = 0, \ldots, 2n-2 \tag{24}$$

onde $l = \text{máx}(0, n-k-1)$ e $m = \text{mín}(2n-k-1, n)$. **NOTA**: Probando coa matriz de arriba, debes obter $\mathbf{v} = [11, 28, 41, 50, 65, 54, 37, 24, 15]$.

NOTA: o elemento v_k é a suma da k-ésima diagonal da matriz **a**. Esta k-ésima diagonal está formada polos elementos a_{ij} que cumpren a condición $i-j = n-1-k$, ou ben $j = k-n+i+1$, con $k = 0, \ldots, 2n-2$. Como debe ser $j \geq 0$, entón $k-n+i+1 \geq 0$ e $i \geq \text{máx}(0, n-k-1)$. Además, como debe ser $j < n$, isto implica que $k-n+i+1 < n$ e $i < \text{mín}(2n-k-1, n)$. Para $k = 0$ temos a primeira diagonal, integrada polo elemento $a_{(n-1)0}$. Para $k = n-1$ temos a diagonal principal, integrada polos elementos a_{ii}, que verifican $i-j = 0$. Para $k = 2n-2$ temos a última diagonal, integrada polo elemento $a_{0(n-1)}$. En total hai $2n-1$ diagonais para unha matriz cadrada de orde n.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
a=loadtxt('matriz.dat');n=size(a,0)
p=2*n-1;v=array([0]*p)
for k in range(p):
  s=0;l=max(0,n-k-1);m=min(2*n-k-1,n)
  for i in range(l,m):
    s=s+a[i,k-n+i+1]
    v[k]=s
print('v=',v)
```

Sesión 7: Entrada/Saída desde arquivos con manexo de excepcións.

Traballo en clase

Cando se traballe con arquivos numéricos moi regulares (o arquivo so ten números e todas as filas teñen igual número de columnas) será moito máis simple utilizar a funcionalidade do paquete `Numpy` (as funcións `loadtxt()` e `savetxt()`). Para o resto dos casos (nos que o arquivo contén cadeas de caracteres e/ou liñas con lonxitudes distintas), utilizaremos a funcionalidade da linguaxe Python. En ambos casos, pode existir un erro durante o proceso de lectura e/ou escritura (arquivo que non existe, ruta incorrecta, etc.) que debemos xestionar para que o programa non aborte. A xestión destes erros realízase en Python utilizando **excepcións**.

As excepcións son erros detectados por Python durante a execución dun programa, e nos que a persoa que programa pode configurar que facer cando se produce o erro. Cando o programa atopa unha situación anómala xera ou lanza un evento (obxeto de tipo `Exception`) informándonos do problema. Posibles excepcións son: división por cero, arquivo que non existe, etc. Python utiliza a construción `try/except` para capturar e tratar as excepcións. O bloque `try` (intentar) define o fragmento de código no que cremos que se pode producir unha excepción. O bloque `except` (excepción) permite indicar o que se fará se se produce dita excepción para xestionala. Python ten definidas varios tipos de excepcións que se poden consultar en: `https://docs.python.org/3/library/exceptions.html`.

A lectura/escritura xenérica en arquivos sempre se realiza con cadeas de caracteres ou listas de cadeas, polo tanto, se queres ler ou escribir números será necesario convertilos a cadeas de caracteres (usando, por exemplo, as funcións `str()`, `float()`, `int()` ...).

1. **Escritura en arquivo sen xestión de excepcións**: escribe un programa que pida por teclado un número enteiro positivo n que representa o número de liñas que terá o arquivo. O programa ten que escribir no arquivo `datos.txt` n liñas. En cada liña i, $i = 0, \ldots, n-1$, sexa m_i un número aleatorio enteiro positivo no intervalo $[1,\ 10 + n]$ que representa o número de elementos que terá a liña i no arquivo. Xera aleatoriamente m_i números enteiros para almacenar na liña i do arquivo `datos.txt`.

```
#!/usr/bin/python3
from random import * # modulo estandar de numeros aleatorios
nl=abs(int(input('Numero de linhas: ')))
outfile = open("datos.txt", 'w')
for i in range(nl):
    mi=randint(1, 10 + nl)
    cad=''
    for j in range(mi):
        x=randint(0, mi)
        #cad = cad + str(x) + ' '
        cad = cad + '%s ' % str(x)
    print(cad)
    cad = cad + '\n'
    outfile.write(cad)
outfile.close()
```

2. **Lectura de arquivos como texto**: le o arquivo anterior nunha sentenza e visualizao na pantalla, xestionando os erros con excepcións.

```
#!/usr/bin/python3
try:
    infile = open("datos.txt", 'r')
    aux=infile.read()
    print(aux)
    infile.close()
```

```
except IOError:
    print('Erro abrindo o arquivo datos.txt')
```

3. Lectura do arquivo anterior liña a liña utilizando iteración.

```
#!/usr/bin/python3
try:
    infile = open("datos.txt", 'r')
    for linha in infile:
        print(linha)
    infile.close()
except IOError:
    print('Erro abrindo datos.txt')
```

4. **Lectura de arquivos con números**: Escribe un programa que lea o arquivo `datos.txt`, pida por teclado un nome dun arquivo, e garde nel o contido do arquivo `datos.txt` ordeando os números de menor a maior en cada liña.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
nome=input('Nome do arquivo de saida: ')
try:
    infile = open("datos.txt", 'r')
    outfile = open(nome, 'w')
    for linha in infile:
        aux=array(linha.rsplit())
        # transformacion a numeros
        out=int_(aux)
        print(out)
        out.sort() # ordea lista
        # transforma en cadea de caracteres
        n=len(out)
        cad=''
        for i in range(n):
            cad = cad + '%s ' % str(out[i])
        cad = cad + '\n'
        outfile.write(cad) # escribe cadea en arquivo
    infile.close()
    outfile.close()
except IOError:
    print('Erro abrindo arquivos datos.txt e ', nome)
```

Alternativa menos eficiente sen utilizar o módulo `numpy`:

```
#!/usr/bin/python3
nome=input('Nome do arquivo de saida: ')
try:
    infile = open("datos.txt", 'r')
    outfile = open(nome, 'w')
    for linha in infile:
        print('Lida: ', linha)
        aux=linha.rsplit()
        print('rsplit: ', aux)
        # transformacion a numeros
        out=[]
        n=len(aux)
        for i in range(n):
            out.append(int(aux[i]))
```

```
            print(out)
            out.sort() # ordea lista
            # transforma en cadea de caracteres
            cad=''
            for i in range(n):
                cad = cad + '%s ' % str(out[i])
            cad = cad + '\n'
            outfile.write(cad) # escribe cadea en arquivo
        infile.close()
        outfile.close()
    except IOError:
        print('Erro abrindo arquivos datos.txt e ', nome)
```

5. Crea un arquivo de texto chamado `datos.dat` co seguinte contido:

```
15 7 -10 5
23 3 8
45
1 4 7 14
20 9
18
```

Escribe un programa que pida por teclado o nome dun arquivo, lea números mentres que a súa suma sexa inferior a 100, almacene os números nun vector **x** e mostre por pantalla o vector.

Solución utilizando un `for`:

```
#!/usr/bin/python3
nome=input('Nome arquivo: ')
try:
  suma=0
  f=open(nome, 'r')
  rematar=False
  v=[]
  for linha in f:
     x=linha.rsplit()
     for i in x:
       suma += float(i)
       v.append(float(i))
       if suma > 100:
           rematar=True
           break
     if rematar:
       break
  print('Suma = ', suma)
  print('v= ', v)
  f.close()
except IOError:
  print('Erro no arquivo %s' % nome)
```

Solución utilizando un `while` (comproba se chega ao final do arquivo porque a cadea lida ten lonxitude cero):

```
#!/usr/bin/python3
nome=input('Nome arquivo: ')
try:
  suma=0
```

```
  f=open(nome, 'r')
  rematar=False
  v=[]
  while suma < 100:
    linha=f.readline()
    if len(linha)==0:
        print('chegou a fin do arquivo')
        break
    x=linha.rsplit()
    for i in x:
       suma += float(i)
       v.append(float(i))
       if suma > 100:
           break
  print('Suma = ', suma)
  print('v= ', v)
  f.close()
except IOError:
  print('Erro abrindo %s ou chegada ineperada do final.' % nome)
```

6. **Uso do módulo** `pandas`. Este módulo proporciona unha maneira de traballar con datos en forma de táboa, pero onde as columnas poden ser numéricas ou de texto. O obxecto básico é o `pandas.core.frame.DataFrame`, o seu argumento pode ser un arrai o diccionario. Podes crear manualmente un `DataFrame` co seguinte comando:

```
>>> from pandas import *
>>> x=DataFrame({'nome':['Maria Lopez Garcia','Carlos Fernandez Rodriguez','Iris
  Casas Perez'], 'idade':[22,45,18], 'peso':[78.3,67.5,72.1]})
>>> x
                        nome  idade  peso
0          Maria Lopez Garcia     22  78.3
1  Carlos Fernandez Rodriguez     45  67.5
2            Iris Casas Perez     18  72.1
>>> x['idade'].max()
>>> x.describe()
>>> s=Series([11.2,12.5,13.4,11.5],name='Temperatura')
>>> s
Out[7]:
0    11.2
1    12.5
2    13.4
3    11.5
Name: Temperatura, dtype: float64
>>> s.max()  # máximo
>>> s.describe()  # mostra parámetros estatísticos das columnas numéricas
```

Para ler datos dende un arquivo `csv` (comma separated values), descarga o arquivo `titanic.csv`, e desde unha folla de cálculo en formato Excel `xls`, descarga o arquivo `titanic.xls`, e executa os seguintes comandos:

```
# carga dende páxina en folla de cálculo en formato Excel xlsx
>>> titanic=read_excel('titanic.xls',sheet\_name='passengers')
>>> titanic.info() # mostra información sobre os datos
>>> titanic=read_csv('titanic.csv')  # carga o arquivo csv
>>> titanic.head(10)  # mostra as 10 primeiras filas (NaN=ausente)
>>> titanic.dtypes  # mostra os tipos das distintas columnas
```

```
>>> idade_xenero=titanic[['Age','Sex']] # colle as dúas columnas a outro DataFrame
>>> shape(idade_xenero)
>>> maiore_35=titanic[titanic['Age']>35] # mostra as filas con Age>35
>>> clase_23=titanic[titanic['Pclass'].isin([2,3])] # pasaxeiros con Pclass=2,3
>>> idade_conhecida=titanic[titanic['Age'].notna()] # pasaxeiros con idade coñecida
# cando se indica filas e columnas, hai que user loc ou iloc
>>> nomes_35=titanic.loc[titanic['Age']>35,'Name'] # nomes de pasaxeiros maiores de 35
>>> titanic.iloc[9:25,2:5]  # columnas 2-4 de pasaxeiros 9-24
>>> titanic.iloc[0:3,3]='anonymous' # cambia o nome dos pasaxeiros 0-2
>>> titanic.Pclass.unique()  # mostra os valores (non repetidos) da columna Pclass
```

Para calcular estatísticas:

```
>>> titanic['Age'].max()  #idade máxima das persoas do Titanic
>>> titanic['Age'].idxmax()  # nº de fila da persoa máis vella
# fila completa da persoa máis vella
>>> titanic.loc[titanic['Age'].idxmax()]
>>> titanic[['Age','Fare']].median()  # mediana das columnas Age e Fare (prezo)
Age     28.0000
Fare    14.4542
>>> titanic.agg({ # estatísticas agregadas
        "Age": ["min", "max", "median", "skew"],
        "Fare": ["min", "max", "median", "mean"],
    })
>>> titanic[['Sex','Age']].groupby('Sex').mean()  # idade media agrupada por xénero
>>> titanic.groupby('Sex').mean()  # medias de tódalas columnas agrupadas por xénero
        PassengerId  Survived    Pclass        Age     SibSp     Parch       Fare
Sex
female   431.028662  0.742038  2.159236  27.915709  0.694268  0.649682  44.479818
male     454.147314  0.188908  2.389948  30.726645  0.429809  0.235702  25.523893
>>> titanic.groupby('Sex')['Age'].mean()  # media de so a columna 'Age' agrupada por xénero
Sex
female    27.915709
male      30.726645
Name: Age, dtype: float64
# prezo medio agrupado por xénero e clase
>>> titanic.groupby(['Sex','Pclass'])['Fare'].mean()
Sex     Pclass
female  1         106.125798
        2          21.970121
        3          16.118810
male    1          67.226127
        2          19.741782
        3          12.661633
Name: Fare, dtype: float64
# conta cantas filas hai en cada valor da columna (discreta) 'Pclass', ou sexa
# cantas persoas había de cada clase
>>> titanic['Pclass'].value_counts()
3    491
1    216
2    184
# ordea as filas da táboa por idade crecente
>>> titanic.sort_values(by='Age').head()
# ordea as filas da táboa por clase e idade decrecentes
>>> titanic.sort_values(by=['Pclass', 'Age'], ascending=False).head()
```

Descarga o arquivo air_quality_no2.csv para facer unhas representacións gráficas.

```
>>> from pylab import *  # innecesario se executaches 'ipython3 --pylab'
>>> air_quality=read_csv('air_quality_no2.csv',index_col=0,parse_dates=True)
>>> air_quality.plot()  # representa tódalas columnas
>>> air_quality['station_paris'].plot()  # representa unha soa columna
# scatterplot Londres-Paris
>>> air_quality.plot.scatter(x='station_london',y='station_paris',alpha=0.5)
>>> [
    method_name
    for method_name in dir(air_quality.plot)
    if not method_name.startswith("_")
]  # lista tódolos métodos de representación gráfica dispoñíbeis
Out[8]:
['area',
 'bar',
 'barh',
 'box',
 'density',
 'hexbin',
 'hist',
 'kde',
 'line',
 'pie',
 'scatter']
>>> air_quality.plot.box()  # un destes métodos: boxplot
>>> air_quality.plot.area(figsize=(12,4),subplots=True)  # 3 gráficas en columna con áreas
# crea unha nova columna como unha operación cunha columna existente
>>> air_quality['london_mg_per_cubic']=air_quality['station_london']*1.882
>>> air_quality_renamed=air_quality.rename(columns={
        'station_antwerp': 'BETR801',
        'station_paris': 'FR04014',
        'station_london": 'London Westminster',
    })
```

O módulo **pandas** permite traballar con series temporais. Para isto, descarga o arquivo air_quality_no2_long.csv.

```
>>> air_quality=read_csv('air_quality_no2_long.csv')
>>> air_quality=air_quality.rename(columns={'date.utc':'datetime'})
# convirte a columna datetime de cadeas de caracteres a obxectos datetime
# nos que podes sacar o día, hora, día da semana, ano, etc.
>>> air_quality['datetime']=to_datetime(air_quality['datetime'])
>>> air_quality['datetime'].min(),air_quality['datetime'].max()  # instantes de comezo e final
(Timestamp('2019-05-07 01:00:00+0000', tz='UTC'),
 Timestamp('2019-06-21 00:00:00+0000', tz='UTC'))
>>> air_quality["datetime"].max() - air_quality["datetime"].min()
Timedelta('44 days 23:00:00')
# crea unha nova columna co mes (enteiro) do dato
>>> air_quality['month']=air_quality['datetime'].dt.month
# mostra a concentración media de NO2 cada día da semana
>>> air_quality.groupby([air_quality['datetime'].dt.weekday,'location'])['value'].mean()
datetime  location
0         BETR801               27.875000
          FR04014               24.856250
          London Westminster    23.969697
1         BETR801               22.214286
          FR04014               30.999359
          London Westminster    24.885714
2         BETR801               21.125000
```

```
           FR04014               29.165753
           London Westminster    23.460432
3          BETR801               27.500000
           FR04014               28.600690
           London Westminster    24.780142
4          BETR801               28.400000
           FR04014               31.617986
           London Westminster    26.446809
5          BETR801               33.500000
           FR04014               25.266154
           London Westminster    24.977612
6          BETR801               21.896552
           FR04014               23.274306
           London Westminster    24.859155
Name: value, dtype: float64
# diagrama de barras coa concentración media cada hora do día
>>> air_quality.groupby(air_quality['datetime'].dt.hour)['value'].mean().plot(kind='bar')
>>> xlabel('Hora do día");ylabel('$NO_2 (µg/m^3)$')
```

O seguinte comando crea unha nova táboa `no2` na que cada instante de tempo é unha fila, e hai unha columna para cada valor da columna `location`. Aqueles instantes de tempo na táboa orixinal con 3 estacións terán unha fila na táboa no2 con 3 valores, un en cada columna. Os instantes de tempo con 2 estacións terán valores nas columas correspondentes a éstas, a `NaN` na estación na que non teñen valores; e así sucesivamente. A columna datetime de `no2` é o índice desta nova táboa `no2`.

```
>>> no2=air_quality.pivot(index='datetime',columns='location',values='value')
# representa os valores das 3 estacións entre un día e outro
>>> no2['2019-05-20':'2019-05-21'].plot()
# calcula o máximo mensual, establecendo unha frecuencia mensual (M)
>>> max_mensual=no2.resample('M').max()
location                   BETR801  FR04014  London Westminster
datetime
2019-05-31 00:00:00+00:00     74.5     97.0                97.0
2019-06-30 00:00:00+00:00     52.5     84.7                52.0
```

Para xestionar datos de tipo carácter (`str`), voltamos á táboa `titanic`:

```
>>> titanic['Name'].str.lower()  # convirte a minúsculas
# crea unha nova columna Apelido cos apelidos
>>> titanic['Apelido']=titanic['Name'].str.split(',').str.get(0)
>>> titanic[titanic['Name'].str.contains('Countess')]  # lista as condesas
>>> titanic['Name'].str.len()  # lonxitudes dos nomes de tódalas filas
>>> titanic['Name'].str.len().idxmax()  # índice da fila co nome máis longo
>>> titanic.loc[titanic['Name'].str.len().idxmax(),'Name']  # fila da persoa co nome máis longo
>>> titanic['Sex_brief']=titanic['Sex'].str.replace('female','F')  # substitúe female por F
```

Traballo a desenvolver polo alumnado

1. Dado o arquivo de texto coa táboa periódica (descarga o arquivo **taboaperiodica.txt** con datos dos elementos químicos ordeados por número atómico. Significado das columnas: 1) abreviatura do elemento, 2) nome do elemento e 3) peso atómico en gramos por mol.

   Escribir un programa que pida por teclado repetidamente a abreviatura dun elemento químico, visualice na pantalla o seu nome completo e peso atómico (ten que atopar a información no arquivo anterior). O programa ten que rematar cando se introduza por teclado unha X.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
try:
    filein=open('taboaperiodica.txt', 'r')
    # cargar datos en memoria
    peso=[]; elemento=[]; simbolo=[]
    for l in filein:
        cad=l.rsplit()
        simbolo.append(cad[0])
        elemento.append(cad[1])
        peso.append(float(cad[2]))
    #ler elementos do teclado
    n=len(elemento)
    print('Devolve peso atomico de elementos quimicos')
    el=input('Introduce elemento (-1 para sair): ')
    while el != '-1':
        for i in range(n):
            if el.upper() == simbolo[i].upper():
                print("Elemento: ", simbolo[i], elemento[i], "Peso: ", peso[i])
        el=input('Introduce elemento (-1 para sair): ')

except IOError:
    print('Erro lendo taboaperiodica.txt')
```

2. Escribe un programa que lea por teclado unha cadea de caracteres coa fórmula química dun composto e calcule o peso molecular do mesmo. Para simplificar considera:

   - Usa como abreviaturas dos elementos químicos os nomes que figuran no arquivo **taboaperiodica.txt** do exercicio anterior, mantendo as convencións de primeira letra en maiúscula e segunda ou terceira en minúscula.
   - Despois de cada elemento hai un número especificando o número de elementos no composto. Por exemplo: C102 (para CO_2), H2O1 (para H_2O, C1O3Ca1 (para CO_3Ca), etc.
   - O peso atómico de cada elemento químico obterase do arquivo **taboaperiodica.txt** do exercicio anterior.

   Nota aclaratoria: sea x unha cadea de caracteres, o método `x.isdigit()` devolve `True` se x é un número e `False` en caso contrario (se x é unha letra). O método `isdigit()` tamén pode ser aplicado sobre un elemento da cadea (`x[0].isdigit()` devolve `True` se o primeiro elemento da cadea é un número).

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from sys import exit
from numpy import *
try:
    filein=open('taboaperiodica.txt', 'r')
    # cargar datos en memoria
    peso=[]; elemento=[]; simbolo=[]
    for l in filein:
        cad=l.rsplit()
        simbolo.append(cad[0])
        elemento.append(cad[1])
        peso.append(float(cad[2]))
except IOError:
    exit('Erro lendo taboaperiodica.txt')

composto=input('Introduce composto: ')
```

```
n=len(composto)
i=0
el=[]; number=[]
while i<n:
    if composto[i].isdigit():
        p=i # posicion inicio No. elementos
        i=i+1
        if i < n:
            while composto[i].isdigit():
                i=i+1
                if i == n:
                    break;
        number.append(int(composto[p:i]))
    else:
        p=i # posicion inicio nome elemento
        i=i+1
        while composto[i].isdigit() == 0:
            i=i+1
        el.append(composto[p:i])
print("Elementos: ", el)
print("No. elementos: ", number)

ne=len(el) # numero de elementos no composto
pm= 0 # peso molecular
s=array(simbolo)
for i in range(ne):
    # sensible a maiusculas e minisculas
    p=where(el[i] == s)[0]
    if len(p) == 1:
        pm= pm + number[i]*peso[p[0]]
    else:
        print('Simbolo ', el[i], 'non esta na taboa periodica')
print('Peso molecular de ', composto, ' = ', pm)
```

Sesión 8 : Definición de funcións. Creación de módulos.

Traballo en clase

1. Escribe unha función, chamada `fact()`, que calcule o factorial dun número enteiro. Escribe un programa que pida por teclado un número n e calcule o factorial de todos os enteiros no intervalo [0, n]. Para comprobar o resultado podes utilizar a función `factorial()` do módulo `math` que calcula o factorial dun número enteiro.

```
#!/usr/bin/python3
n = int(input("Introduce n: "))
# inicio da definicion de funcion
def fact(x):
  if x < 2:
    return 1
  else:
    f = 1
    for i in range(2,x+1):
      f = f * i
    return f
# fin da definicion de funcion
for i in range(n+1):
  print("Factorial de ", i, "es",fact(i))
```

2. Escribe un programa que use dúas funcións `calcula_mcd` e `calcula_mcm` que calculen respectivamente o máximo común divisor e o mínimo común múltiplo de dous números enteiros positivos x e y. Proba con $x = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5, y = 36 = 2^2 \cdot 3^2$, tes que obter $mcd = 12, mcm = 360$.

```
#!/usr/bin/python3
print(" calcula o mcd e mcm de dous enteiros positivos x e y: ")
x= int(input ("x? "))
y= int(input ("y? "))
#descomposicion en factores primos
def factores_primos(a):
  x=a; b=[]; e=[]; i=2
  while x >1:
    if x %i == 0:
      x=x/i; b.append(i); e.append(1)
      while x %i == 0:
          e[-1]=e[-1]+1; x=x/i
    i=i+1
  print(" descomposicion de",a,":", end=',')
  for i in range(len(b)):
    print(b[i],"^",e[i],"*", end=',')
  print()
  return [b,e]

[bx ,ex] = factores_primos(x)
[by ,ey] = factores_primos(y)

def calcula_mcm(bx ,ex ,by ,ey ): # minimo comun multiplo
  b=bx[:]; e=ex[:] # copia bases exponhentes a mcm
  nx=len(b); ny=len(by)
  for i in range(ny): # percorre factores de y
    comun =False
```

```
    for j in range(nx): # compara con factores de x
      if b[j]== by[i]:
          comun =True
          if ey[i]>e[j]:
            e[j]= ey[i] # colle meirande expenhente
            break
    if not comun:
      b.append(by[i]); e.append(ey[i]) # engade factores non comuns
  mcm =1
  print(" descomposicion do mcm:", end=',')
  for i in range(len(b)):
      print(b[i],"^",e[i],"*", end=',')
      mcm=mcm*b[i]**e[i]
  print()
  print("mcm=",mcm)
  return mcm

mcm= calcula_mcm(bx ,ex ,by ,ey)
print("mcm=",mcm)
def calcula_mcd(bx ,ex ,by ,ey ): #maximo comun divisor
  b=[]; e=[]; nx=len(bx ); ny=len(by)
  for i in range(nx):
    z=bx[i]
    for j in range(ny):
      if z== by[j]:
          b.append(z)
          e.append(min(ex[i],ey[j])) # colle o menor exponhente
  mcd =1
  print(" descomposicion do mcd:", end=',')
  for i in range(len(b)):
    print(b[i],"^",e[i],"*", end=',')
    mcd=mcd * b[i]**e[i]
  print()
  print("mcd=",mcd)
  return mcd

mcd= calcula_mcd(bx ,ex ,by ,ey)
print("mcd=",mcd)
```

Unha alternativa utilizando a función `zip()` (esta función permite iterar conxuntamente sobre dúas listas da mesma lonxitude) e compactando algúns procesos sería:

```
def factores(a):
        print('%i: '%a,end='')
        b=[];e=[];i=2
        while a>1:
                if a%i==0:
                        b.append(i);e.append(1);a/=i
                        while a%i==0:
                                e[-1]+=1;a/=i
                i+=1
        for i,j in zip(b,e):
                print('%i^%i '%(i,j),end='')
        print('')
        return [b,e]
############################################################
def mcm(x,y):
```

```
        bx,ex=factores(x)
        by,ey=factores(y)
        m=x
        for i,j in zip(by,ey):
                if i in bx:
                        k=bx.index(i);l=ex[k]
                        if j>l:
                                m=m*i**(j-l)
                else:
                        m=m*i**j
        return m
#########################################################
def mcd(x,y):
        bx,ex=factores(x)
        by,ey=factores(y)
        m=1
        for i,j in zip(bx,ex):
                if i in by:
                        k=by.index(i);l=ey[k]
                        m=m*i**min(j,l)
        return m
#########################################################
print('mcd e mcm de x,y')
x=int(input('x? '))
y=int(input('y? '))
print('mcm=%i mcd=%i'%(mcm(x,y),mcd(x,y)))
```

3. **Creación dun módulo propio:** crea un módulo chamado `mcdmcm.py` que conteña as funcións para calcular o mínimo común múltiplo e o máximo común divisor de dous números enteiros. Para isto só é necesario definir as funcións nun arquivo `.py`, e o nome do arquivo será o nome do módulo. O uso de módulos definidos propios segue a mesma sintaxe que os módulos de Python. Desde o programa principal `modulosPropios.py` lee dous números desde o teclado e calcula o mínimo común múltiplo e o máximo común divisor utilizando o módulo que acabas de crear. As funcións que contén o módulo `mcdmcm.py` son:

```
#!/usr/bin/python

#descomposicion en factores primos
def factores_primos(a):
  x=a; b=[]; e=[]; i=2
  while x >1:
    if x %i == 0:
      x=x/i; b.append(i); e.append(1)
      while x %i == 0:
          e[-1]=e[-1]+1; x=x/i
    i=i+1
  return [b,e]

def calcula_mcm(x,y): # minimo comun multiplo
  [bx ,ex] = factores_primos(x)
  [by ,ey] = factores_primos(y)
  b=bx[:]; e=ex[:] # copia bases exponhentes a mcm
  nx=len(b); ny=len(by)
  for i in range(ny): # percorre factores de y
    comun =False
    for j in range(nx): # compara con factores de x
      if b[j]== by[i]:
```

```
            comun =True
            if ey[i]>e[j]:
              e[j]= ey[i] # colle meirande expenhente
              break
      if not comun:
          b.append(by[i]); e.append(ey[i]) # engade factores non comuns
    mcm =1
    for i in range(len(b)):
        mcm=mcm*b[i]**e[i]
    return mcm

def calcula_mcd(x, y): #maximo comun divisor
    [bx ,ex] = factores_primos(x)
    [by ,ey] = factores_primos(y)
    b=[]; e=[]; nx=len(bx); ny=len(by)
    for i in range(nx):
      z=bx[i]
      for j in range(ny):
        if z== by[j]:
            b.append(z)
            e.append(min(ex[i],ey[j])) # colle o menor exponhente
    mcd =1
    for i in range(len(b)):
      mcd=mcd *b[i]**e[i]
    return mcd
```

e o arquivo `modulosPropios.py` contén:

```
#!/usr/bin/python3
from mcdmcm import *
print(" calcula o mcd e mcm de dous enteiros positivos x e y: ")
x= int(input ("x? "))
y= int(input ("y? "))
print('Minimo comun multiplo: ', calcula_mcm(x,y))
print('Maximo comun divisor: ', calcula_mcd(x,y))
```

Pola outra banda, no paquete `fractions` existe a función `gcd(x,y)` (greatest common divider) que calcula o máximo común divisor (mcd) de dous números `x` e `y`. Logo, usando que $\text{mcm}(x,y)\text{mcd}(x,y) = xy$, temos que $\text{mcm}(x,y) = \dfrac{xy}{\text{mcd}(x,y)}$:

```
#!/usr/bin/python3
from fractions import gcd
print("calcula o mcd e mcm de dous enteiros positivos x e y")
x= int(input("x? "))
y= int(input("y? "))
print("mcd de",x,"e",y,"=",gcd(x,y))
print("mcm de",x,"e",y,"=",x*y/gcd(x,y))
```

4. **Funcións lambda:** o operador `lambda` sirve para crear funcións anónimas en línea. As funcións lambda (ou anónimas) constrúense co operador `lambda`, a lista de argumentos separados por comas e SEN paréntases, dous puntos (:) e o código da función (unha única expresión). En tempo de execución son igual as funcións normais pero, as funcións lambda resultan uteis cando o corpo da función contén só unha expresión. Define unha función que calcule se os elementos dunha lista son pares ou impares. Tamén define unha función lambda que sume tres números.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
```

```
# usando funciones
def es_par(n):
    return (n % 2 == 0)

l = array([1, 2, 3])
print "Usando funciones: ",es_par(l)
# usando funciones lambda con un argumento
f=lambda n: n % 2 == 0
print("Usando funciones lambda: ", f(l))
# usando a funcion lambda con varios argumentos
g=lambda n1, n2, n3: n1+n2+n3
print("Sumando numeros 2+4+5: ", g(2,4,5))
```

Traballo a desenvolver polo alumnado

1. **Función definida por intervalos.** Escribe unha función `funcionIntervalos(...)` que reciba como argumentos os límites superior e inferior dun intervalo e retorne unha lista cos valores da función $f(x)$ seguinte neste intervalo:

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{x+2} & -6 \leq x < -2 \\ x^2 & -2 \leq x < 2 \\ (x+6)^{1/3} & 2 \leq x < 6 \end{cases}$$

   Escribe tamén un programa que represente gráficamente $f(x)$ no intervalo $-10 \leq x \leq 10$.

2. Escribe unha funcion que calculo o máximo e o mínimo de tres números. Escribe un programa que pida por teclado tres números por teclado, chame a función que acabas de definir e visualice o máximo e o mínimo dos tres números.

3. **Persistencia dun número enteiro**: escribe un programa que lea por teclado un número enteiro e calcule a súa persistencia. Con este fin, o programa deberá separar o número nas súas cifras e multiplicalas entre si. O resultado tamén se dividirá nas súas cifras, e éstas multiplicaranse entre si continuando o proceso ata obter un resultado dunha única cifra. A persistencia será o número de veces que se repetiu o proceso. Exemplo: o número 715 ten persistencia 3: 715 descomponse nas súas cifras (7,1 e 5), multiplicanse as cifras entre si e resulta 35, repítese o proceso e resulta 15, repítese o proceso e resulta 5 (715− > 35− > 15− > 5). A persistencia é o número de veces que se repite a decomposición, polo tanto, 3 para 715. NOTA: para descompoñer un número nas súas cifras podes dividir sucesivamente por 10 e quedar co resto da división.

```
#!/usr/bin/python3
n=int(input('Introduce numero: '))
veces=0
no=n
while n > 10:
    m=1
    while n != 0:
        # dividir por 10 para descomponher en cifras
        m = m * (n % 10)
        n = n // 10
    # o resultado sigo descomponhendo en cifras ate que o numero xa sea dunha cifra
    n = m
    veces = veces + 1

print("Persistencia = ", veces)
```

   Alternativa analizando as cadeas de caracteres é:

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
n='a'
while not n.isnumeric():
    n=input('Introduce numero: ')
veces=0
while len(n) > 1:
    digits=int_(list(n))
    m=product(digits)
    n=str(m)
    veces += 1
print("Persistencia = ", veces)
```

4. Calcula o valor da función $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ nos puntos x=0 e x=3.4 utilizando dunha función lambda.

5. Realiza un programa en Python que calcule o valor da función:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{25}$$

nos puntos $(x, y) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ utilizando unha función lambda para definir a función $f(x, y)$.

Sesión 9 : Regresión lineal. Creación de módulos.

Traballo en clase

A ciencia experimental intenta relacionar unha ou máis magnitudes mediante unha función matemática. A análise de regresión proporciona un método estatístico para avaliar cal é a función que describe, de xeito máis exacto, a relación entre as magnitudes.

- **Axuste de puntos a polinomios:** dado un conxunto de puntos $\{(x_i, y_i), i = 1 \dots m\}$ almacenados no arquivo `puntos.dat` (na primeira liña os x_i e na segunda liña os y_i), atopa o polinomio $p(x)$ de grao n que mellor se axusta ós puntos (minimiza a suma dos erros cadráticos entre os puntos (x_i, y_i) e os valores $(x_i, p(x_i))$ do polinomio, dada pola expresión:

$$E = \sum_{i=1}^{m} [y_i - p(x_i)]^2 \tag{26}$$

  O programa debe pedir por teclado a orde do polinomio n, facer o axuste e visualizar gráficamente os puntos e o polinomio axustado. Proba cos seguintes datos:

```
0.0 1.0 2.0 3.0  4.0  5.0
0.0 0.8 0.9 0.1 -0.8 -1.0
```

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
# vectores de puntos
x = array([0.0, 1.0, 2.0, 3.0,  4.0,  5.0])
y = array([0.0, 0.8, 0.9, 0.1, -0.8, -1.0])
n=0
while n < 1:
  n=int(input('Introduce orde do polinomio: '))
z = polyfit(x, y, n) # axusta a un polinomio de orde n
print("Polinomio axustado: ")
for i in range(n):
  print(z[0], " x **", i, "+", end=',')
print(z[n]," x **", n)
# representar graficamente puntos e a curva axustada
from matplotlib.pyplot import *
xp = linspace(min(x), max(x), 100)
p=polyval(z, xp) # calcula os valores do polinomio axustado en xp
plot(x, y, '.', xp, p, '--')
grid(True)
title(u"Axuste a polinomio de orde %d" % (n))
xlabel('x'); ylabel('y'); show()
```

- **Interpolación de funcións:** dados m puntos $\{(x_j, y_j), j = 1 \dots m\}$ dunha función $f(x)$ descoñecida, quérese calcular $y_i = f(x_i)$ con $x_i \neq x_j$ para $j = 1 \dots m$. Os valores y_i chámaselles valores interpolados. Realiza un programa que a partir da función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en 10 valores de x equidistantes no intervalo $[0, 2\pi]$, calcule os valores interpolados en 50 valores equidistantes no mesmo intervalo. Utiliza interpolación lineal e cúbica.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
# x son 10 mostras equiespaciadas en [0,2pi]
# se probas con 5 mostras a diferencia entre interpolacion
# lineal e cubica e maior
x = linspace(0, 2*pi, 10)
```

```
y = sin(x)
xvals= linspace(0, 2*pi, 50)
yinterp = interp(xvals, x, y) # interpolacion lineal
# representacion grafica
from matplotlib.pyplot import *
plot(x, y, 'ob', label='Puntos reais') # puntos reais
plot(xvals, yinterp, '-xg', label='Interp. lineal') # puntos interpolados
title('seno(x)'); xlabel('x'); ylabel('y')

# outros tipos de interpolacion no paquete scipy
from scipy.interpolate import *
f=interp1d(x, y, 'cubic')
yinterpc=f(xvals)
plot(xvals, yinterpc, '-dm', label='Interp. cubica')
legend(loc='upper right')
grid(True);show()
```

- **Regresión lineal:** supoñamos que dúas magnitudes x e y verifican a función lineal $y = a + bx$. Queremos determinar, a partir dun conxunto de N pares de valores x_i, y_i, con $i = 0, \ldots, N-1$, os valores de a e b, así como as súas incertezas e o correspondente intervalo de confianza. O **método de mínimos cadrados** permite determinar os valores de a e b minimizando a suma dos productos do peso estadístico de cada punto polos cadrados das desviacións dos datos respecto ós valores preditos pola función a determinar. Os valores de a e b veñen dados polas expresións:

$$b = \frac{N\sum_i x_i y_i - \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i y_i\right)}{N\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{27}$$

$$a = \frac{\left(\sum_i x_i^2\right)\left(\sum_i y_i\right) - \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i x_i y_i\right)}{N\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{28}$$

A **desviación típica do axuste** para a mostra ven dada pola expresión:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - a - bx_i)^2}{N-2}} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{29}$$

As **incertezas dos parámetros** a **e** b polas expresións:

$$s(a) = s\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{N\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{30}$$

$$s(b) = s\sqrt{\frac{N}{N\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{31}$$

e o **coeficiente de regresión lineal** (r), relacionada coa exactitude da ecuación da recta na representación dos datos (r será máis preciso canto máis se achegue a 1 o seu valor absoluto ($|r|$)), pola expresión:

$$r = \frac{N\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{\sqrt{\left(N\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2\right)\left(N\sum_i y_i^2 - \left(\sum_i y_i\right)^2\right)}} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{32}$$

- **Regresión lineal ponderada:** nela debe minimizarse a suma ponderada dos cadrados das desviacións, co que as ecuaciones 27 a 32 transformaríanse en:

$$a = \frac{\sum_i w_i y_i \sum_i w_i x_i^2 - \sum_i w_i x_i \sum_i w_i x_i y_i}{\Delta} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{33}$$

$$b = \frac{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_i w_i y_i}{\Delta} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{34}$$

onde $w_i = \frac{1}{s(y_i)^2}$ é o peso estadístico, $s(y_i)$ é a incerteza na medida y_i e Δ é o determinante da matriz:

$$\begin{pmatrix} \sum_i w_i & \sum_i w_i x_i \\ \sum_i w_i x_i & \sum_i w_i x_i^2 \end{pmatrix}$$

As incertezas de a e b serán:

$$s(a) = \sqrt{\frac{\sum_i w_i x_i^2}{\Delta}} \quad \text{e} \quad s(b) = \sqrt{\frac{\sum_i w_i}{\Delta}} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{35}$$

A desviación típica do axuste sería:

$$s = \sqrt{\frac{N}{(N-2)\sum_i w_i} \sum_i w_i (y_i - a - b x_i)^2} \tag{36}$$

e o coeficiente de regresión para un axuste ponderado será:

$$r = \frac{\sum_i w_i \sum_i w_i x_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_i w_i y_i}{\sqrt{\left(\sum_i w_i \sum_i w_i x_i^2 - \left(\sum_i w_i x_i\right)^2\right)\left(\sum_i w_i \sum_i w_i y_i^2 - \left(\sum_i w_i y_i\right)^2\right)}} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{37}$$

1. Realiza un módulo en Python chamado `regresion.py` que conteña a funcionalidade para calcular a función matemática $y = a + bx$ utilizando regresión simple ou ponderada, para o cal debe calcular os valores de a e b. Tamén debe calcular as incertezas $s(a)$ e $s(b)$ e o coeficiente de regresión r.

```
#!/usr/bin/python3
# paquete que conten funcionalidade para realizar regresions lineais
from numpy import *
from numpy.linalg import * # para determinante matriz
```

```
def regresionSimple(x,y):
    """Axusta os datos dos vectore x e y a unha resta dada pola ec. y=a + bx
        Parametros:
        x vector con medidas da magnitud x
        y vector con medidas da magnitud y
        Devolve:
        a coeficiente a
        b coeficiente b
        sa incerteza de a
        sb incerteza de b
        r coeficiente de regresion lineal """
    n=len(x)
    sx=sum(x); sy=sum(y); xx=dot(x,x); yy=dot(y,y); xy=dot(x,y);
    denom=(n*xx - sx**2)
    b=(n*xy - sx*sy)/denom
    a=(xx*sy - sx*xy)/denom
    s=sqrt(sum((y-a-b*x)**2)/(n-2))
    sa=s*sqrt(xx/(n*xx-sx**2))
    sb=s*sqrt(n/(n*xx-sx**2))
    r=(n*xy-sx*sy)/sqrt((n*xx-sx**2)*(n*yy-sy**2))
    return [a,b, sa, sb, r]

def regresionSimpleSenTermoIndependente(x,y):
    """Axusta os datos dos vectore x e y a unha resta dada pola ec. y= bx
        Parametros:
        x vector con medidas da magnitud x
        y vector con medidas da magnitud y
        Devolve:
        b coeficiente b
        sb incerteza de b
        r coeficiente de regresion lineal """
    n=len(x)
    xy=dot(x,y); xx=dot(x,x); xy=dot(x,y); yy=dot(y,y)
    b=xy/xx
    s=sqrt(sum((y-b*x)**2)/(n-1))
    sb=s/sqrt(xx)
    r=xy/sqrt(xx*yy)
    return [b, sb, r]

def regresionPonderada(x,y,s):
    """Axusta os datos dos vectores x e y a unha resta dada pola ec. y=a + bx
    utilizando regresion ponderada
        Parametros:
        x vector con medidas da magnitud x
        y vector con medidas da magnitud y
        s vector coas incertezas na medida y
        Devolve:
        a coeficiente a
        b coeficiente b
        sa incerteza de a
        sb incerteza de b
        r coeficiente de regresion lineal """
    w=1.0/(s*s)
    wy=sum(w*y);  wx=sum(w*x);
    wxx=sum(w*x*x); wxy=sum(w*x*y); wyy=sum(w*y*y)
    sw=sum(w)
    d=det(array([[sw, wx],[wx, wxx]]))
```

```
    a=(wy*wxx-wx*wxy)/d
    b=(sw*wxy-wx*wy)/d
    sa=sqrt(wxx/d); sb=sqrt(sw/d)
    r=(sw*wxy-wx*wy)/sqrt((sw*wxx-wx**2)*(sw*wyy-wy**2))
    return [a, b, sa, sb, r]

def regresionPonderadaSenTermoIndependente(x,y,s):
    """Axusta os datos dos vectores x e y a unha resta dada pola ec. y= bx
    utilizando regresion ponderada
        Parametros:
        x vector con medidas da magnitud x
        y vector con medidas da magnitud y
        w vector coas incertezas na medida y
        Devolve:
        b coeficiente b
        sb incerteza de b
        r coeficiente de regresion lineal """
    n=len(x); w=1.0/(s*s); sw=sum(w)
    wxy=sum(w*x*y); wxx=sum(w*x*x); wyy=sum(w*y*y)
    b=wxy/wxx
    s=sqrt(n*sum(w*(y-b*x)**2)/(n-1)/sw)
    sb=1.0/sqrt(wxx)
    r=wxy/sqrt(wxx*wxy)
    return [b, sb, r]
```

2. Realiza un programa que, utilizando o módulo `regresion.py`, calcula a recta $y = a + bx$ que mellor axuste os datos experimentais do seguinte arquivo de texto `datos.txt` supoñendo que se realiza unha regresión simple:

```
1 3 4 6 8 11 12 15
1 7 12 17 25 34 36 45
```

onde a primeira fila son as medidas x_i e a segunda fila as medidas y_i. Visualiza as incertezas de a e b e o coeficiente de regresión na pantalla. Amplia o programa anterior para que realice unha regresión ponderada supoñendo que as incertezas de x_i son despreciables e as incertezas de y_i son $s(y_i) = y_i/10$. Representa gráficamente os puntos e as rectas axustadas.

```
#!/usr/bin/python3
# proba o modulo regresion.py lendo dun arquivo os datos a axustar.
from numpy import *
from sys import exit
from regresion import *
from matplotlib.pyplot import *
arquivo=input("Arquivo de datos: ")

try:
    a=loadtxt(arquivo)
    (nf,nc)=a.shape
    if nf == 2:
        x=a[0]; y=a[1]
    elif nf == 3:
        x=a[0]; y=a[1]; s=a[2]
    else:
        print('Numero de linhas no arquivo: ', nf)
        raise
except IOError:
    exit("Arquivo %s non existe" % (arquivo))
```

```
except:
    exit("Arquivo non adecuado")
clf()
subplots_adjust(hspace=0.4)
subplot(211)
plot(x, y, 'b*')
n=len(x); p=[0, n-1]
a,b, sa, sb, r=regresionSimple(x,y)
print("Regresión simple. Ec. da recta: ", 'y= %g + %g x' % (a, b))
print("a= %g b= %g sa=%g sb=%g r=%g" % (a,b, sa, sb, r))
yr=a + b * x
plot(x[p], yr[p], 'g-', label='RS')
b2, sb2, r2=regresionSimpleSenTermoIndependente(x,y)
print("Regresión simple sen termo independente. Ec. da recta: ", 'y=  %g x' % (b2))
print("b= %g sb=%g r=%g" % (b2, sb2, r2))
yr2=b2 * x
plot(x[p], yr2[p], 'r-', label='RSSTI')
legend(loc='upper left')
xlabel('$x_i$'); ylabel('$y_i$')
title('Regresion simple')


subplot(212)
plot(x,y,'b*')
if nf == 2:
    print("Utiliza pesos por defecto w=0.1 yi")
    # os pesos sumaselle un epsilon=1e-5 para evitar divisions por cero
    a,b, sa, sb, r=regresionPonderada(x,y, 0.1*y+ 1e-5)
    print("Regresión ponderada. Ec. da recta: ", 'y= %g + %g x' % (a, b))
    print("a= %g b= %g sa=%g sb=%g r=%g" % (a,b, sa, sb, r))
    b2, sb2, r2=regresionPonderadaSenTermoIndependente(x,y, 0.1*y+ 1e-5)
    print("Regresión ponderada sen termo independente. Ec. da recta: ", 'y=  %g x' % (b2))
    print("b= %g sb=%g r=%g" % (b2, sb2, r2))
else:
    a,b, sa, sb, r=regresionPonderada(x,y, s)
    print("Regresión ponderada. Ec. da recta: ", 'y= %g + %g x' % (a, b))
    print("a= %g b= %g sa=%g sb=%g r=%g" % (a,b, sa, sb, r))
    b2, sb2, r2=regresionPonderadaSenTermoIndependente(x,y, s)
    print("Regresión ponderada sen termo independente. Ec. da recta: ", 'y=  %g x' % (b2))
    print("b= %g sb=%g r=%g" % (b2, sb2, r2))
yr= a + b*x
plot(x[p], yr[p], 'g-', label='RP')
yr2= b2*x
plot(x[p], yr2[p], 'r-', label='RSSTI')
legend(loc='upper left')
xlabel('$x_i$'); ylabel('$y_i$')
title('Regresion ponderada')
savefig('regresion.eps')
show(False)
```

3. Proba o programa anterior cos datos simulados:

```
1 2 3 4 5 6 7 8
9.9 13.5 16.1 19.9 22.5 25.2 29.2 32
```

onde a primeira fila son as medidas x_i e a segunda fila as medidas y_i. Na regresión ponderada supón que as incertezas de x_i son despreciables e as incertezas de y_i son o 10 % da medida.

Traballo a desenvolver polo alumnado

1. Dados os puntos con coordenadas **x**=[0,1,2,3,4,5] e **y**=[1,-0.6242,-1.4707,3.2406,-0.7366,-6.3717], axústaos a un polinomio de orde 5 e representa gráficamente os puntos e o polinomio.

2. Dados os puntos con coordenadas **x**=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10] e **y**=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3], axústaos a unha función potencial da forma $y = ax^b$.

```
>>> from numpy import *
>>> x=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10];y=[8,6,9,4,7,2,6,1,2,3];
>>> p=polyfit(log(x),log(y),1)
>>> p
array([-0.65511141,  2.35723692])
>>> a=exp(p[1]);b=p[0]
>>> from pylab import *
>>> clf();x2=linspace(1,10,100)
>>> y2=a*x2**b
>>> plot(x,y,'sb')
>>> plot(x2,y2,'r-')
```

3. Dados os puntos anteriores, axústaos a unha función exponencial da forma $y = a\mathrm{e}^{bx}$:

```
>>> polyfit(x,log(y),1)
array([-0.16691054,  2.28573762])
```

4. Axusta os puntos anteriores a unha función logarítmica da forma $y = a \log x + b$:

```
>>> polyfit(log(x),y,1)
array([-2.68882221,  8.86130799])
```

5. Axusta os puntos a unha función recíproca da forma $y = \dfrac{1}{ax+b}$:

```
>>> polyfit(x,1./array(y),1)
array([ 0.05309043,  0.03756614])
```

6. **Regresión lineal simple sen termo independente**. Amplía o módulo `regresion.py` para que calcule o axuste a unha recta utilizando regresión lineal simple sen termo independente. Se a recta de axuste na regresión lineal pasa pola orixe de coordenadas, a función matemática sería $y = bx$ e as ecuacións 27 a 32 transfórmanse nas seguintes expresións:

$$b = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{38}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - bx_i)^2}{N-1}} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{39}$$

$$s(b) = \frac{s}{\sqrt{\sum_i x_i^2}} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{40}$$

$$r = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sqrt{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2}} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{41}$$

7. **Regresión lineal ponderada sen termo independente**. Amplía o módulo `regresion.py` para que calcule o axuste a unha recta utilizando regresión lineal ponderada sen termo independente. Se a recta de axuste na regresión lineal pasa pola orixe de coordenadas, a función matemática sería $y = bx$ e as ecuacións 33 a 37 tranfórmanse nas seguintes expresións:

$$b = \frac{\sum_i w_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{42}$$

$$s = \sqrt{\frac{N}{(N-1)\sum_i w_i} \sum_i w_i \left(y_i - b x_i\right)^2} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{43}$$

$$s(b) = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i x_i^2}} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{44}$$

$$r = \frac{\sum_i w_i x_i y_i}{\sum_i w_i x_i^2 \sum_i w_i y_i^2} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{45}$$

8. Realiza un programa que lea dun arquivo de texto `datos.txt` os datos experimentais a axustar e, utilizando o módulo `regresion.py`, calcule a ecuación da recta utilizando os dous tipos de regresión sen termo independente. No caso dos datos simulados, deberías obter os seguintes calculos:

```
Regresión simple. Ec. da recta:  y= 6.94286 + 3.13214 x
a= 6.94286 b= 3.13214 sa=0.278293 sb=0.0551102 r=0.999073
Regresión simple sen termo independente. Ec. da recta:  y=  4.35735 x
b= 4.35735 sb=0.236926 r=0.98981
Utiliza pesos por defecto w=0.1 yi
Regresión ponderada. Ec. da recta:  y= 6.88012 + 3.14575 x
a= 6.88012 b= 3.14575 sa=1.02997 sb=0.297306 r=0.999093
Regresión ponderada sen termo independente. Ec. da recta:  y=  4.75988 x
b= 4.75988 sb=0.17321 r=2.18172
```

Deberás obter a figura 3.

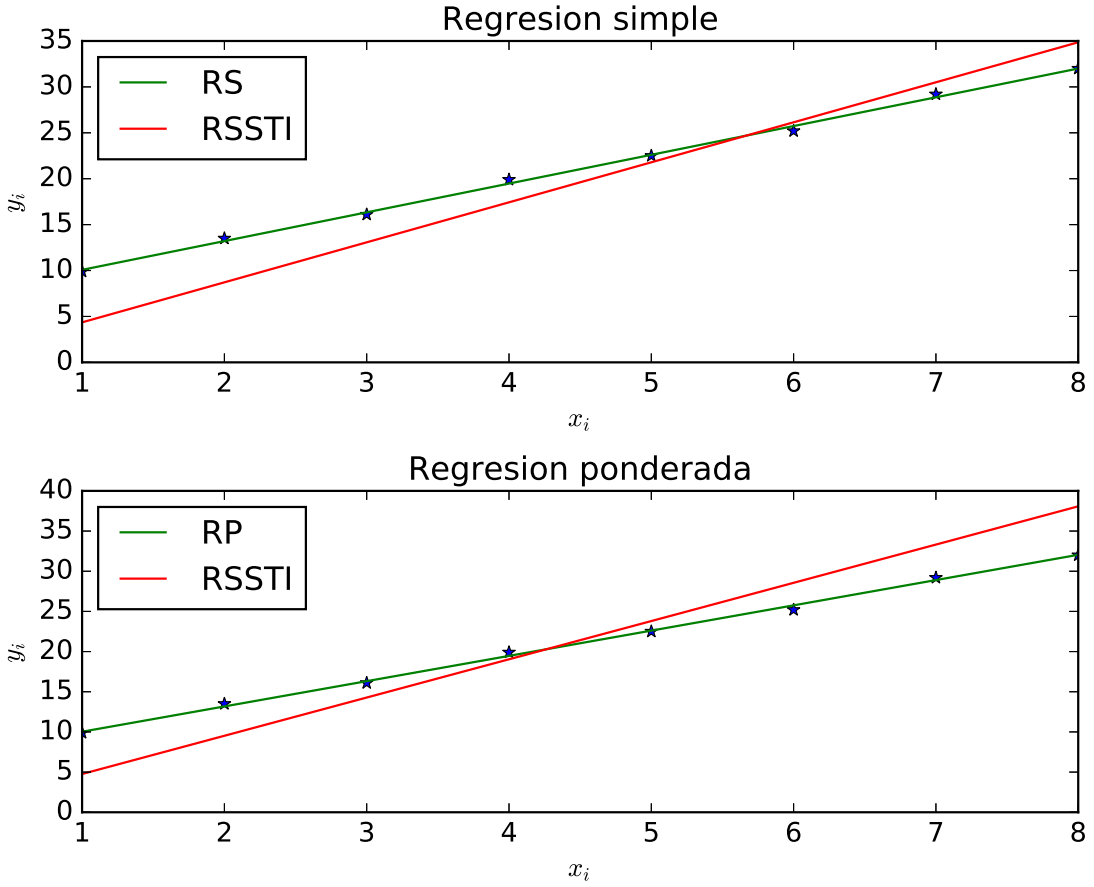


Figura 3: Gráfico que mostra a recta que mellor axusta os datos simulados utilizando regresión lineal simple e ponderada.

Sesión 10: suma de series, derivadas e integrais numéricas

Traballo en clase

1. **Suma dunha serie**. Escribe un programa chamado `serie.py` que calcule o valor aproximado da serie numérica infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Para isto, debes sumar os termos $1/n^2$ mentres que o seu valor sexa maior que 10^{-5}. O programa debe representar gráficamente: a) os valores dos sumandos frente a n; b) o valor da suma en función de n.

```
#!/usr/bin/python3
from matplotlib.pyplot import *
suma =0; sumando =1;n=1
umbral =1e-5
x=[];y=[];z=[]
while sumando > umbral :
  sumando =1.0 / n**2
  suma=suma+ sumando
```

```
  x.append(n);y.append(sumando);z.append(suma)
  n=n+1
subplot (211);
semilogy (x,y)
#plot(x,y)
xlabel ('n'); ylabel ('sumando '); grid(True)
xlim (1,n)
subplot (212); plot(x,z)
xlabel ('n'); ylabel ('suma '); grid(True)
xlim (1,n)
show(True)
print('umbral = %g' % umbral)
print('valor calculado = %.10f' % suma)
```

2. **Derivada dunha función dados os seus valores nun intervalo**. Escribe unha función chamada `derivada()` que reciba como argumento unha lista `f` cos valores dunha función nun intervalo. A función `derivada()` debe retornar outra lista `df` cos valores da derivada da función nese intervalo. Considera que se $\{f(x_0), \ldots, f(x_{n-1})\}$ é a lista de valores da función no intervalo, entón $x_{i+1} - x_i \approx h$, con $i = 0, \ldots, n-2$, de modo que, supoñendo $h \simeq 0$:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, i = 0, \ldots, n-2 \tag{46}$$

   Descarga o arquivo **posicion.dat**. Considera que h=0.01. Dende o programa principal, le os datos do arquivo a unha lista e chama á función `derivada(...)` para que calcule a velocidade como a derivada da posición. Finalmente, usa a función `ediff1d(...)` de `numpy`, que fai o mesmo que a función `derivada(...)`.

```
#!/usr/bin/python3
from matplotlib.pyplot import *
from numpy import ediff1d
from sys import exit

def derivada(f):
    n=len(f)-1;df=[0]*n;h=0.01
    for i in range(n):
        df[i]=(f[i+1]-f[i])/h
    return df

p=[]
try:
    f=open("posicion.dat","r")
    for linha in f:
        p.append(float(linha))
    f.close()
except IOError:
    exit("erro abrindo posicion.dat")
v=derivada(p)
#v=ediff1d(p)  # alternativa de numpy
subplot(211); plot(p);
xlabel("tempo (s)"); ylabel("posicion (m)"); grid(True)
subplot(2,1,2); plot(v);
xlabel("tempo (s)"); ylabel("velocidade (m)"); grid(True)
show(False)
```

3. **Integral indefinida dunha función dados os seus valores nun intervalo**. Escribe unha función chamada `integral(...)`, pasándolle como argumento os valores dunha función $f(x)$ nun certo intervalo (os límites deste intervalo non se deben pasar como argumentos). Esta función debe

calcular a integral indefinida $\int f(x)dx$, usando que se $p(x) = \int f(x)dx$ é unha primitiva de $f(x)$, entón $\frac{dp(x)}{dx} = f(x)$. Considerando a definición de derivada, temos que:

$$\frac{dp(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} \approx \frac{p(x+h)-p(x)}{h} = f(x) \Rightarrow \tag{47}$$

$$f(x) \approx \frac{p(x+h)-p(x)}{h} \Rightarrow p(x+h) \approx p(x) + hf(x) \tag{48}$$

Supoñendo que no punto inicial do intervalo a primitiva $p(x)$ é coñecida (por exemplo, que vale 0), o cal é equivalente a fixar a constante de integración C, podemos calcular os valores $p(x+ih), i = 1,\ldots,n$, sendo $n = 1 + \frac{b-a}{h}$ o número de valores de $f(x)$, calculando así unha primitiva de $f(x)$. Usa h=0.01. A función `integral(...)` debe retornar unha lista cos valores de $p(x)$ calculados. Logo, descarga o arquivo **forza.dat**, que contén os valores dunha forza $F(x)$ en función da posición x. Escribe un programa que lea dende este arquivo a forza $F(x)$, e chame á función `integral(...)` anterior, pasándolle como argumento unha lista cos valores $F(x)$ lidos dende o arquivo. Os valores retornados serán os valores do potencial $V(x) = -\int F(x)dx$. O programa principal debe representar gráficamente os valores da forza $F(x)$ e do potencial $V(x)$ en función de x.

```
#!/usr/bin/python3
from matplotlib.pyplot import *
from numpy import *
def integralf(f):
  n=len(f);  p=[0.0]*n
  for i in range(1,n):
    p[i]=p[i-1]-0.01*f[i-1]
  return p
# programa principal
try:
  fz=loadtxt('forza.dat')
except IOError:
  print('Erro abrindo forza.dat')
v=integralf(fz)
x=range(len(fz))
subplot(2,1,1); plot(x,fz); xlabel('x (metros)'); ylabel('Forza (Nw)'); grid(True)
subplot(2,1,2); plot(x,v); xlabel('x (metros)'); ylabel('Potencial (Nw*m)'); grid(True)
show()
```

Traballo a desenvolver polo alumnado

1. **Partícula nun potencial**. Consideremos un obxecto (que podes considerar que é unha partícula) con masa $m = 1$ kg que se atopa nun campo de forzas radial dado polo potencial:

$$V(r) = V_0 \ln\left(1 + \frac{b}{r^2}\right) \tag{49}$$

onde r é o radio (distancia ao orixe do campo) en metros, V_0=1 Nw·m e b=1 m^2. No instante inicial $t = 0$ s. a partícula atópase en r_0=0.01 m con velocidade v_0=1 m/s. Calcula e representa gráficamente para $r_0 \le r \le r_1 = 1.5$ m. con paso Δr=0.01 m:

   a) O potencial $V(r)$.

   b) A forza $F(r)$, dada por $F = -\frac{dV}{dr}$.

c) A velocidade $v(r)$. Para isto, debes ter en conta que $F = ma, a = \frac{dv}{dt}, v = \frac{dr}{dt}$, de modo que:

$$a = \frac{F(r)}{m} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}v \rightarrow adr = vdv \rightarrow \int_{r_0}^{r} \frac{F(s)}{m} ds = \int_{v_0}^{v} wdw$$

e finalmente:

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \frac{1}{m}\int_{r_0}^{r} F(s)ds \rightarrow v(r) = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{r_0}^{r} F(s)ds} \tag{50}$$

Ademáis, nota que $\int_{r_0}^{r} F(s)ds \simeq \Delta r \sum_{i<n} F(r_i)$, con $r_0 \leq r_i \leq r_1$, sendo $r_i = r_0 + i\Delta r$ onde $\Delta r = \frac{r_1 - r_0}{n-1}$ e $i = 0, \ldots, n-1$.

d) O radio en función do tempo $r(t)$ para $0 \leq t \leq 0.15$ s. con Δt=0.001 s. Para isto, considera que $r(t=0) = r_0$=0.01 m. e que $\frac{dr}{dt} \simeq \frac{\Delta r}{\Delta t} = v[r(t)]$, de modo que $r(t+\Delta t) = r(t) + v[r(t)]\Delta t$. Para calcular $v[r(t)]$ busca o valor $v(r)$, calculado no apartado anterior, para o valor de r máis cercano a $r(t)$.

Tes que obter a gráfica da figura 4:

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from pylab import *

clf()

V0,b,m=1,1,1
r=arange(0.01,1.5,0.01);n=len(r);

subplots_adjust(hspace=0.4)
subplots_adjust(wspace=0.4)

# potencial
V=V0*log(1+b/r**2)
subplot(221)
plot(r,V);grid(True);xlabel('r (m)');ylabel('V(r) (Nw*m)')

#forza
F=zeros(n)
for i in range(n-1):
        F[i]=-V[i+1]+V[i]  #F=-dV/dr
subplot(222)
plot(r,F);grid(True);xlabel('r (m)');ylabel('F(r) (Nw)')

#velocidade
v0=1;v=zeros(n)
for i in range(n):  # v=sqrt(v0^2+int(F(x)dx)/m)
        v[i]=sqrt(v0**2+2*sum(F[0:i])/m)
subplot(223)
plot(r,v);grid(True);xlabel('r (m)');ylabel('v(r) (m/s)')

#radio en funcion do tempo
```

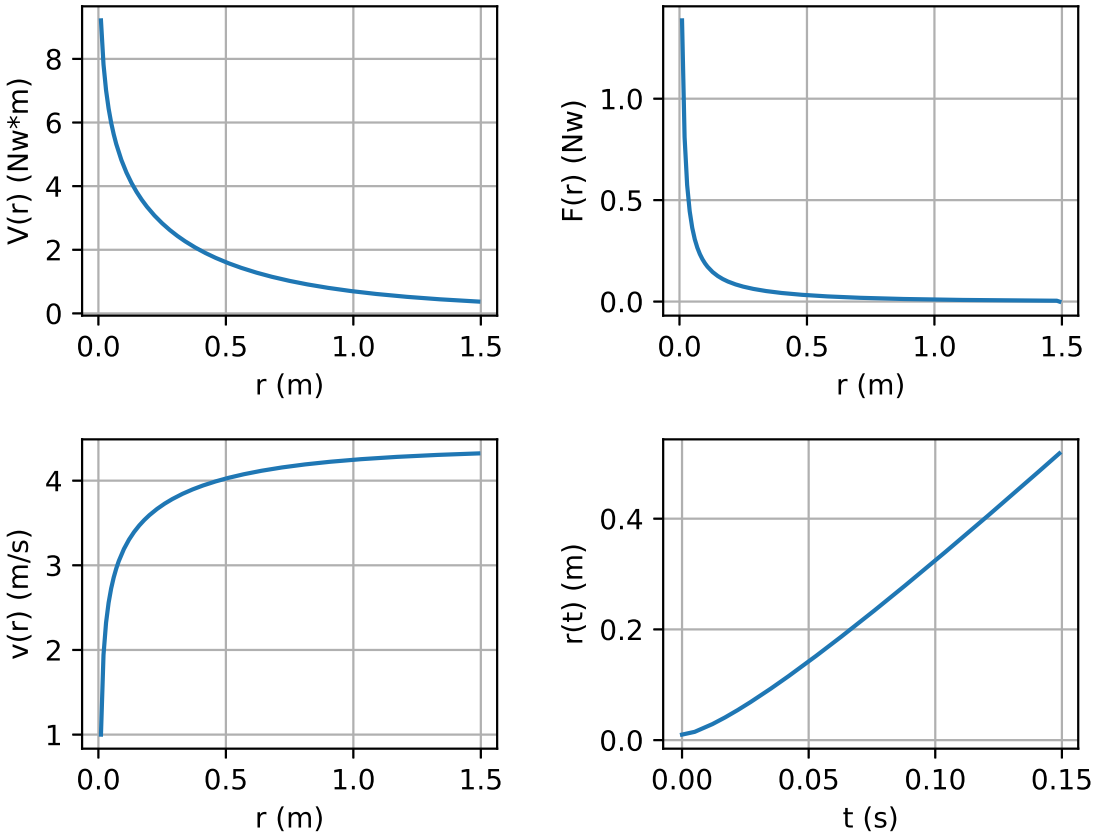


Figura 4: Potencial $V(r)$, forza $F(r)$, velocidade $v(r)$ e radio $r(t)$ no exercicio do potencial.

```
dt=1e-3;t=arange(0,0.15,dt);n=len(t);r2=zeros(n);r2[0]=0.01
for i in range(1,n):
        k=argmin(abs(r-r2[i-1]))  #atopa k tal que r[k] é o máis cercano a p[i-1]
        r2[i]=r2[i-1]+v[k]*dt
subplot(224)
plot(t,r2);grid(True);xlabel('t (s)');ylabel(u'r(t) (m)')

show()
savefig('potencial.eps')
```

Sesión 11 : Representación gráfica avanzada

Traballo en clase

1. **Curvas en escala logarítmica**. Representa gráficamente as curvas: 1) $f(x) = \mathrm{e}^{-x/50}$ con escala Y logarítmica; 2) $f(x) = \operatorname{sen} 2\pi x$ con escala X logarítmica; 3) $f(x) = 20\mathrm{e}^{-t/10}$ con escalas X e Y logarítmicas. Usa x dende 0.01 ata 20 con paso 0.01.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from matplotlib.pyplot import *

subplots_adjust(hspace=0.4)
t = arange(0.01, 20.0, 0.01)

# log y axis
subplot(311)
semilogy(t, exp(-t/5.0))
title('semilogy')
grid(True)

# log x axis
subplot(312)
semilogx(t, sin(2*pi*t))
title('semilogx')
grid(True)

# log x and y axis
subplot(313)
loglog(t, 20*exp(-t/10.0), basex=2)
grid(True)
title('loglog base 4 on x')

show(False)
```

2. Representa gráficamente a **curva 2D animada** $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \operatorname{sen} tx/2$, con $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $t = 0 \ldots 200$ segundos.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from matplotlib.pyplot import *
from matplotlib.animation import *

fig = figure(1)
ax = fig.add_subplot(111)

x = arange(-pi/2, pi/2, 0.01)
line, = ax.plot(x, exp(-x**2)*sin(x/2))
axis([-pi/2,pi/2,-1,1])
grid(True)

def animate(t):
    line.set_ydata(exp(-x**2)*sin(t*x/2))
    return line,
```

```
def init():
    line.set_ydata(ma.array(x, mask=True))
    return line,

ani = FuncAnimation(fig, animate, arange(1, 200),
  init_func=init,interval=25, blit=True)

show(False)
```

3. **Curva en coordenadas polares en 2D**. Son curvas da forma $\varrho = \varrho(\theta)$. Representa a curva $\varrho = 2\pi\varrho$ con $\varrho = 0 \ldots 3$ e paso 0.01.

```
#!/usr/bin/python3
from matplotlib.pylab import *
from numpy import *

theta = arange(0, 3.0, 0.01);  rho= 2*pi*theta

# fixo figura cadrada
ancho,alto = matplotlib.rcParams['figure.figsize']
tam = min(ancho, alto); fig = figure(figsize=(tam, tam))
ax = fig.add_axes([0.1, 0.1, 0.8, 0.8],polar=True)

ax.plot(rho, theta)
grid(True)

ax.set_title("Espiral rho=2*pi*theta", fontsize=15)
show(False)
```

4. Escribe un programa que represente gráficamente en 3D a función $f(x, y) = \text{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$ con $x, y \in [-4, 4]$ con paso 0.25. Código en (`grafico3d.py`). O resultado sería a figura 5.

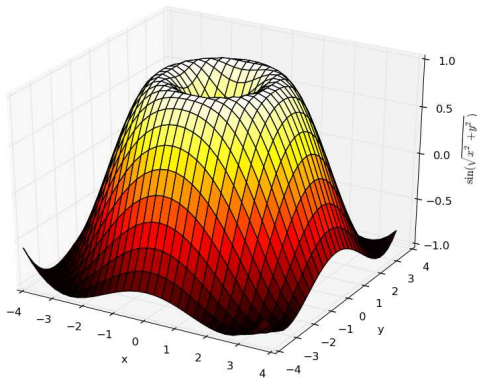


Figura 5: Gráfico 3D da superficie $z = \text{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$.

```
from pylab import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

fig = figure()
ax = Axes3D(fig)
X = np.arange(-4, 4, 0.25)
Y = np.arange(-4, 4, 0.25)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
R = np.sqrt(X**2 + Y**2)
```

```
Z = np.sin(R)

ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap='hot')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel(r'$\sin(\sqrt{x^2+y^2})$')
savefig('grafico3d.png')

show()
```

5. Representa gráficamente a **curva en 3D dada polas ecuacións paramétricas** $x(t) = \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{sen}\,t, y(t) = \sqrt{t^2+1}\cos t, z(t) = t$, con $t = -4\pi \ldots 4\pi$.

```
#!/usr/bin/python3
from matplotlib.pyplot import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from numpy import *

fig = figure(1)
ax = fig.gca(projection='3d')

# ecuacions de x(t),y(t),z(t): cambiar para outras ecuacions
t = linspace(-4*pi, 4*pi, 100); r = t**2 + 1
x = r * sin(t)
y = r * cos(t)
z = t

ax.plot(x, y, z, label=u'curva parametrica')
ax.legend()

show(False)
```

6. Representa a **animación 3D** dada por $z = f(x,y,t) = (1 - \sqrt{x^2+y^2})\cos(2\pi x + t)$, sendo $x, y \in [-1,1]$, con 50 valores para x e y respectivamente, e $t = 0, \ldots, 100$.

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from matplotlib.pyplot import *
from numpy import *

def f(X, Y, t):
    R = 1 - sqrt(X**2 + Y**2)
    return cos(2 * pi * X + t) * R

ion()
fig = figure(1)
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

xs = linspace(-1, 1, 50)
ys = linspace(-1, 1, 50)
X, Y = meshgrid(xs, ys)
Z = f(X, Y, 0.0)

wframe = None
for t in linspace(0, 100, 100):

    oldcol = wframe
```

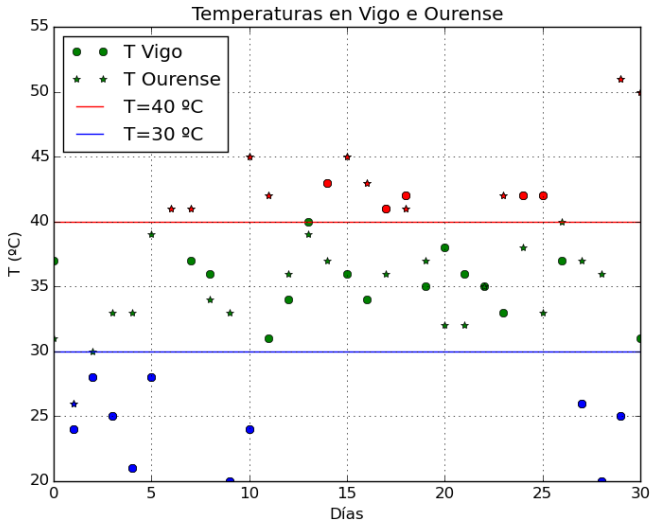
```
    Z = f(X, Y, t)  #funcion z=f(x,y,t)
    wframe = ax.plot_wireframe(X, Y, Z, rstride=2, cstride=2)

    # Remove old line collection before drawing
    if oldcol is not None:
        ax.collections.remove(oldcol)

    draw()
```

7. Escribe un programa que lea dende o arquivo `temperaturas.txt` os seguintes datos de temperaturas diarias nas cidades de Ourense (primeira liña) e Vigo (segunda liña) no mes de agosto:

```
31 26 30 33 33 39 41 41 34 33 45 42 36 39 37 45 43 36 41 37 32 32 35 42 38 33 40 37 36 51 50
37 24 28 25 21 28 46 37 36 20 24 31 34 40 43 36 34 41 42 35 38 36 35 33 42 42 37 26 20 25 31
```

   O programa debe calcular, para cada cidade: a temperatura media de cada cidade, os días nos que a temperatura foi maior e menor a media, os días nos que a temperatura de Ourense foi superior, inferior e igual á de Vigo e cando se acadou unha temperatura superior a 40 graos. Representa gráficamente a temperaturas de Ourense en azul (vector $\mathbf{x}$), poñendo en vermello as temperaturas maiores á temperatura media e en negro as temperaturas inferiores a 30 graos. Noutro gráfico, visualiza as temperaturas de Ourense e Vigo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, mostrando en vermello as temperaturas superiores a 40 graos, en azul as menores de 30 graos e en verde as que están no intervalo [30,40]. O gráfico final amósase na figura 6.

Figura 6: Temperaturas en Ourense e Vigo durante o mes de agosto.




```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from sys import *

name=input('Introduce o nome arquivo: ')
try:
    dat=loadtxt(name)
    x=dat[0]; y=dat[1] # vectores x e y
except IOError:
    exit('Erro abrindo o arquivo %s\n' % name)
except ValueError:
```

```
    exit('Erro lendo arquivo %s\n' % nome)

mx=mean(x); my=mean(y) # valores medios
print('Media x: ', mx)
print('Media y: ', my)
print('Elementos x maiores a media: ', x[x>mx])
print('Elementos x menores media: ', x[x<mx])
print('Elementos x > y: ', x[x>y])
print('Elementos x = y: ', x[x==y])
print('Elementos de x>40: ', x[x > 40])

from matplotlib.pyplot import *
t=arange(x.size)
figure(1)
plot(t, x, 'b*', label=u'vector x')
tmx=where(x > mx)[0]
plot(tmx, x[tmx], 'r*', label=u'x>mx')
t30=where(x<30)[0]
v30=30*ones(x.size)
plot(t, v30, 'g-',label=u'Valor 30')
plot(t30, x[t30], 'ko', label=u'x<30')
legend(loc='upper left')
grid(True)
show(1)
figure(2)
v40=40*ones(x.size)
plot(t, y, 'go', label=u'vector y')
plot(t, x, 'g*', label=u'vector x')
plot(t, v40, 'r-',label=u'Valor 40')
plot(t, v30, 'b-',label=u'Valor 30')
tt=where(x >40)[0]
plot(tt, x[tt], 'r*')
tt=where(y>40)[0]
plot(tt, y[tt], 'ro')
tt=where(x <30)[0]
plot(tt, x[tt], 'b*')
tt=where(y<30)[0]
plot(tt, y[tt], 'bo')
grid(True)
legend(loc='upper left')
show(2)
```

Traballo a desenvolver polo alumnado

1. Representa a curva $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$ con escala Y logarítmica.
2. Representa a animación 2D $f(x,t) = \mathrm{e}^{-xt/10} \operatorname{sen} 10xt$ con $x \in [0,1]$ e $t = 1 \ldots 100$ s.
3. Representa gráficamente a curva polar $\varrho = \operatorname{sen} 4\theta$ con $\theta = 0 \ldots 2\pi$.
4. Representa a curva paramétrica 3D dada polas ecuacións $x(t) = \cos(t)\operatorname{sen}(t), y(t) = \tan(t), z(t) = \operatorname{sen}(t)$, con $t = 0 \ldots 10$ s.
5. Representa a superficie 3D animada $z = f(x,y,t) = \exp(-x^2 - y^2) \operatorname{sen} t(x^2 + y^2)$ con $x, y \in [-1,1]$ e $t = 0 \ldots 10$ s.
6. Quérese comparar gráficamente a variación do vento de duas vilas A e B durante a estación do outono. Supón que a estación metereolóxica rexistra datos durante 90 días e que as medidas da

velocidade do vento simúlanse xerando aleatoriamente números no rango [10,100] Km/h. Realiza un programa que:

- Xere as velocidades do vento e visualice na pantalla a velocidade máxima, mínima e media para ambas vilas.
- Representa nun gráfico de liñas a velocidade do vento nos distintos días para ambas vilas, utilizando a cor verde para a vila A e azul para a vila B. Representa como asteriscos a velocidade máxima e con rombos a velocidade mínima para ambas vilas. Pon título, texto nos eixos e lendas axeitadas no gráfico.
- Pon en vermello os días nos que a velocidade do vento na vila A é maior que na vila B.
- Traza unha liña horizontal para a velocidade media do vento en cada vila.

Sesión 12: Métodos numéricos utilizando sympy e outros exercicios.

Traballo en clase

1. **Uso de sympy dentro de programas:** Escribe un programa que pida por teclado a expresión dunha función $f(x)$ e represente gráficamente $f(x)$ e $f'(x)$ para $x \in [-10, 10]$, obtendo $f(x)$ e $f'(x)$ como funcións `lambda` utilizando o módulo `sympy`.

```
from sympy import *
s=input('f(x)? ')
x=symbols('x')
f=lambdify(x,s)
ds=diff(s,x)
df=lambdify(x,ds)
from numpy import *
x=linspace(-10,10,500)
y=f(x)
dy=df(x)
from pylab import *
clf();subplots_adjust(hspace=0.4)
subplot(211);plot(x,y);title('Función %s'%s);grid(True)
subplot(212);plot(x,dy);title('Derivada %s'%ds);grid(True)
show()
```

2. **Resolución de ecuacións non lineares polo Método de Newton. Bucle híbrido definido-indefinido. Derivación simbólica**. O método de Newton resolve unha ecuación non linear da forma $f(x) = 0$ con f non linear. Para isto, partimos dun punto x_0 e trazamos a recta tanxente á curva $f(x)$ en $x = x_0$. Esta recta tanxente ten a ecuación $y = mx + n$, onde $m = f'(x_0)$ por ser a recta tanxente a $f(x)$ en $x = x_0$. Pola outra banda, o feito de que a curva $f(x)$ e a recta $y = xf'(x) + n$ intersecten no punto $(x_0, f(x_0))$ fai que este punto cumpra a ecuación da recta, de modo que temos que $f(x_0) = x_0 f'(x_0) + n \Rightarrow n = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$, e a ecuación da recta fica así:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{51}$$

Para atopar o punto x_1 de corte desta recta co eixo horizontal, abonda con impor a condición $y(x_1) = 0$ e atopamos:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{52}$$

Repetindo o proceso iterativamente, de modo que a partir dun punto x_i calculamos o novo punto x_{i+1}, aproximámonos a unha solución x^* que verifica $f(x^*) = 0$ (se existe), a non ser que para algún valor x_i teñamos $f'(x_i) = 0$. Podes atopar unha ilustración animada do proceso de búsqueda iterativa da solución neste **enlace**. Escribe un programa que, partindo dun punto inicial x_0, calcule os puntos sucesivos x_i empregando a seguinte fórmula:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{53}$$

Esta operación iterativa deberá executarse ata que $|x_i - x_{i-1}| < 10^{-5}$. Almacena os valores $(x_i, f(x_i)), i = 1, \ldots$ no ficheiro `datos.dat` (un par en cada liña).

EXEMPLO 1: dada a ecuación $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ ten raíces en $x = 1$ (dobre) e $x = -1$ (simple). Neste caso, $n = 3$. Probar con $x_0 = 2$ (para calcular a raíz $x = 1$) e con $x_0 = -3$ (para calcular a raíz $x = -1$).

EXEMPLO 2: a ecuación $xe^{-x}-0.2=0$ ten solución x =2.54264 (proba con $x_0=2$).

EXEMPLO 3: a ecuación $x^2=0$ con $x_0=0$ da derivada nula e non converxe.

```
#!/usr/bin/python3
from sys import exit
from sympy import *
from math import *
expresion=input('f(x)= ')
xi=float(input('x0= '))
niter=int(input('No. maximo iteracions: '))
x=symbols('x')
f=eval('lambda x: '+expresion)  # f=lambdify(x,expresion)
df=lambdify(x, diff(expresion))
for i in range(niter):
    fx=f(xi)
    dfx=df(xi)
    if dfx == 0:
        exit('Erro: f\'(%g)=0: proba cun x0 distinto ' % xi)
    xi1= xi - fx/dfx
    print('i= %d xi1= %.6f  xi=%.6f ' % (i, xi1,xi))
    if fabs(xi1-xi) < 1e-5:
        break
    xi=xi1

if i < niter:
    print('Converxeu: x=%g f=%g en %d iteracions ' % (xi, fx, i))
else:
    print('O metodo de newton non converxeu ')
```

O módulo `scipy.optimize` contén a función `newton` para calcular o cero dunha función utilizando o método de newton. O código sería:

```
#!/usr/bin/python3
from math import *
from scipy.optimize import *
expresion=input('f(x)= ')
xo=float(input('x0= '))
# convirte string a funcion lambda
f=eval('lambda x :'+expresion)
print('x= %f ' % newton(f, xo))
```

3. **Resolución numérica dun sistema de ecuacións diferenciais. Movimento dunha partícula nun campo de forzas no plano**. Consideremos unha partícula de masa 1 kg. que se atopa no campo de forzas $\mathbf{F}(x,y)=(x\,\mathrm{sen}(r-1), y\,\mathrm{sen}(r-1))$, onde $r=\sqrt{x^2+y^2}$. A súa posición $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$ e a súa velocidade $\mathbf{v}(t)=(v_x(t),v_y(t))$ están dadas polas seguintes ecuacións diferenciais:

$$\frac{dx}{dt}=v_x,\quad \frac{dy}{dt}=v_y,\quad \frac{dv_x}{dt}=x\,\mathrm{sen}(r-1),\quad \frac{dv_y}{dt}=y\,\mathrm{sen}(r-1) \tag{54}$$

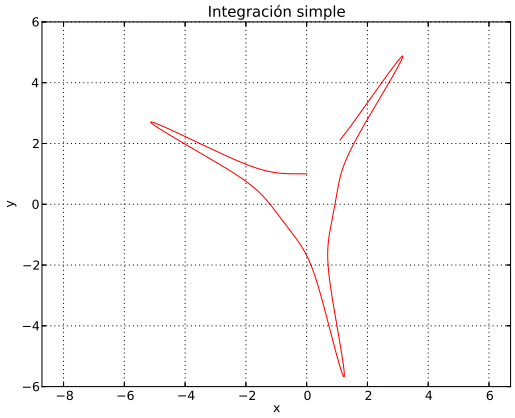
A súa posición e velocidade iniciais están dadas por $\mathbf{r}(0)=(0,1)$ m. e $\mathbf{v}(0)=(-1,0)$ m/s para $t=0$ s. Representa gráficamente a posición $\mathbf{r}(t)$ para $0\le t\le 17$ s. (50 valores): 1) usando integración directa; 2) usando o método de Runge-Kutta; e 3) usando a función `odeint` do paquete `scipy`.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from matplotlib.pylab import *
```

```
from scipy.integrate import *
from time import clock

def derivada(x,der):  #retorna o vector de derivadas: [v_x,y_y,f_x,f_y]
    n = x.size  #x[0]=coord. x; x[1]=coord. y; x[2]=v_x; x[3]=v_y
    if (n!=4):
        print('erro: o nº de dimensións non coincide')
        quit()
    r=sqrt(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])
    fx=sin(r-1)*x[0];fy=sin(r-1)*x[1]
    der=array([x[2],x[3],fx,fy])
    return der

#- método 1: iterador simple con incremento de eps
def metodo1(f,x,t0,eps):
    fder = f(x,t0)
    y = x+ fder*eps
    return y,t0+eps

## método 2: iterador de Runge Kutta de 4ª orde
def metodo2(f,x,t0,eps):
    y0 = x
    fder1 = f(y0,t0); y1 = y0 +0.5*eps*fder1
    fder2 = f(y1,t0+0.5*eps); y2 = y0 +0.5*eps*fder2
    fder3 = f(y2,t0+0.5*eps); y3 = y0 + eps*fder3
    fder4 = f(y3,t0+eps); y=y0 + eps/6.*(fder1+2.*fder2+2.*fder3+fder4)
    return y,t0+eps

#-------------------------------------------------------------
# valores iniciais
eps=1e-3;k=1.;t0=0.;t1=17.;x0=array([0.,1.,-1.,0.]);x=x0;niter=50;


# método 1: xevol1 é unha matriz coa evolución completa do sistema en fotogramas de 1 a niter fotogra
tini=clock();xevol1=x0;i=0;t=t0
while t<t1:
        y,t=metodo1(derivada,x,t,eps)
        x=y;i=i+1
        if (i%niter == 0):
                xevol1 = vstack((xevol1,x))

xt1=xevol1.transpose()[0]
yt1=xevol1.transpose()[1]
print('tempo método1= %.3f s.' % (clock()-tini))
figure(1);clf()
title(u'Integración simple')
xlabel('x');ylabel('y')
plot(xt1,yt1,'r-');axis('equal');grid(True);show(False)

#método 2: Runge-Kutta
tini=clock();xevol2=x0;niter=50;i=0;t=t0
while t< t1:
        y,t=metodo2(derivada,x,t,eps)
        x=y;i=i+1
        if (i%niter == 0):
                xevol2 = vstack((xevol1,x))
```

```
xt2=xevol2.transpose()[0]
yt2=xevol2.transpose()[1]
print('tempo método2= %.3f s.' % (clock()-tini))
figure(2);clf()
title('Runge-Kutta')
xlabel('x');ylabel('y');axis('equal')
plot(xt1,yt1,'r-');grid(True);show(False)

#método 3: usando paquete scipy; nt=nº de tempos usados cos métodos anteriores
tini=clock();nt = int(xevol2.size/x0.size);tt = linspace(t0,t1,nt)
xevol3 = odeint(derivada,x0,tt)
xt3=xevol3.transpose()[0]
yt3=xevol3.transpose()[1]
print('tempo método3= %.3f s.' % (clock()-tini))
figure(3);clf()
title(u'función odeint de scipy')
xlabel('x');ylabel('y');axis('equal')
plot(xt3,yt3,'r-');grid(True);show(False)
```

Tes que obter a gráfica da figura 3.



Traxectoria de partícula sometida a forza $F(x, y)$.

4. **Función con varios valores retornados**. Escribe un programa que lea por teclado un número enteiro n, e cree unha matriz **a** cadrada de orde n con valores enteiros aleatorios no conxunto $\{0, \ldots, n\}$. Logo, este programa debe chamar a unha función `calcula(...)` (debes decidir os seus argumentos), que retorne unha matriz **b** cadrada e un vector **x**, ambos de orde n, e un escalar y. A matriz **b** retornada debe ter tódolos elementos nulos agás os das diagonais principal e secundaria, que deben coincidir cos da matriz **a**. O vector **x** retornado debe verificar que x_i, con $i = 1, \ldots, n$, sexa a suma dos elementos iguais a i na columna i da matriz **a**. Pola súa banda, o escalar y retornado debe ser o número de elementos nulos na matriz **a**. Finalmente, o programa principal debe pedir por teclado o nome dun arquivo e almacenar neste arquivo as matrices **a** e **b**, o vector **x** e o escalar y.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy.random import *
from numpy import *
n=-1
while n < 1:
    n=int(input('Introduce n positivo: '))
a=randint(0, n+1, [n,n])
#*****************************************
```

```
def calcula(a1):
    [nf, nc]=a.shape
    b1=diag(diag(a1))
    for i in range(nc):
        b1[i, -i-1]=a1[i,-i-1]
    x1=zeros(nc)
    for i in range(nc):
        x1[i]=sum(a[:,i] == i)*i
    y=sum(a == 0)
    return [b1, x1, y]
#*********************************************
def transforma(a):
    linhas=[]
    if a.ndim == 2:
        [nf, nc]=a.shape
        for i in range(nf):
            l=''
            for j in range(nc):
                l=l+('%5d' % a[i,j])
            l=l+('\n')
            linhas.append(l)
    if a.ndim == 1:
        nc=len(a)
        l=''
        for j in range(nc):
            l=l+('%5d' % a[j])
        l=l+('\n')
        linhas.append(l)
    return linhas
#*************************************************
[b, x, y]=calcula(a)
arquivo=input('Nome arquivo: ')
try:
    out=open(arquivo, 'w')
    out.write('Matriz a: \n')
    lin=transforma(a)
    out.writelines(lin)
    out.write('Matriz b: \n')
    lin=transforma(b)
    out.writelines(lin)
    out.write('Vector x: \n')
    lin=transforma(x)
    out.writelines(lin)
    out.write('y= %d \n'% y)
    out.close()
except IOError:
    print('Erro no escribindo no arquivo %s' % arquivo)
```

5. Crea un arquivo de texto chamado `matriz.dat` co seguinte contido:

```
1 2 3 4 5
6 7 8 9 8
7 6 5 4 3
2 3 4 5 1
```

```
3 6 5 1 2
```

Escribe un programa que lea o arquivo `matriz.dat` e almacene o seu contido na matriz **a**. O programa debe chamar a unha función `calcula(...)`, pasándolle os argumentos axeitados, que retorne: 1) un vector **x** cos elementos de **a** que dan resto 3 cando se dividen entre catro; e 2) unha matriz **b** das mesmas dimensión de **a** onde:

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}a_{ji} & a_{ij} < a_{ji} \\ \frac{a_{ij}}{a_{ji}} & a_{ij} > a_{ji} \\ a_{ij}^3 & a_{ij} = a_{ji} \end{cases}$$

Logo, o programa debe dividir o vector **x** (é decir, cada elemento de **x**) por 2 mentres a suma dos elementos do vector **x** sexa maior que 10, contando o número de veces que se fixo a división. Finalmente, o programa debe mostrar o vector **x** resultante, a matriz **b** e o núnero de veces que se divideu o vector **x** na pantalla.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from sys import *
try:
    a=loadtxt('matriz.dat')
except IOError:
    exit('Erro lendo arquivo matriz.dat')
except ValueError:
    exit('matriz.dat non ten datos adecuados')

#************************************
def calcula(a1):
    x1=extract(a1%4 == 3, a1)
    b1=a1.copy()
    [nf, nc]=a1.shape
    for i in range(nf):
        for j in range(nc):
            if a1[i,j] < a1[j,i]:
                b1[i,j]=a1[i,j]*a1[j,i]
            elif a1[i,j] > a1[j,i]:
                b1[i,j]=a1[i,j]/a1[j,i]
            else:
                b1[i,j]=a1[i,j]**3
    return [x1,b1]
#****************************************
[x,b]=calcula(a)
n=0;
while sum(x) > 10:
    x=x/2
    n= n+1
    print('x= ', x)

print('Vector x= ', x)
print('Numero de veces que se divide x= ', n)
print('Matriz b= ', b)
```

Traballo a desenvolver polo alumnado

1. **Resolución de ecuacións non lineares polo Método de Bisección** (ver **enlace**). Este método permite buscar solucións dunha ecuación non lineal da forma $f(x) = 0$, nun intervalo [a, b] tal que

$f(a)f(b) < 0$, sendo $f(x)$ unha función continua. Partindo de $x_1 = a$ e $x_2 = b$, calcula $x_m = \frac{a+b}{2}$ e avalía o signo de $f(a)f(x_m)$ e $f(x_m)f(b)$. Inicialmente comproba se $f(a)f(b) < 0$, en caso afirmativo podes aplicar o método e, en caso contrario, o programa remata cunha mensaxe de erro. Posteriormente, se $f(a)f(x_m) < 0$, repite o proceso con a e $x_2 = x_m$, e se $f(x_m)f(b) < 0$, repite o proceso con $x_1 = x_m$ e b. Así vas reducindo o intervalo de búsqueda ata que $f(x_m) = 0$, momento no que o proceso remata, sendo x_m a solución. Como é difícil que se produza a igualdade con 0, podes rematar cando $|f(x_m)| < 10^{-5}$. Proba con $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} - 0.2$ (solución= 0.2592) con $a = 0$ e $b = 1$.

2. Escribe un programa que resolva unha ecuación da forma $f(x) = 0$ polo método **Regula Falsi**. A partir dun punto inicial a_1 (lido por teclado), o programa debe buscar un punto b_1 con $f(a_1)\dot{f}(b_1) < 0$, e calcular

$$b_2 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} \tag{55}$$

   Se $f(a_1)f(b_2) < 0$, o programa debe repeti-lo proceso con a_1 e b_2. Se $f(b_2)f(b_1) < 0$, o programa debe repeti-lo proceso con b_2 e b_1. O programa debe rematar cando $|b_2 - b_1| < 10^{-5}$.

3. Escribe unha función chamada `sumaSerie(...)`, cos argumentos axeitados, que aproxime a serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^p + 6} \tag{56}$$

   usando só os m primeiros sumandos con valores superiores a 10^{-2}. Os valores dos sumandos deben almacenarse no vector $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, de modo que $y_n = \dfrac{3n}{n^p + 1}, n = 1, \ldots, m$. Escribe un programa que chame á función `sumaSerie()` con $p = 3$, e represente gráficamente o vector $\mathbf{y}$ cos valores dos sumandos. Este programa debe construir unha matriz a cadrada de orde m con elementos a_{ij} para $i, j = 1, \ldots, m$, dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} y_i y_j & i < j \\ \dfrac{1}{y_i} & i > j \\ y_i & i = j \end{cases}$$

   Finalmente, o programa debe gardar no arquivo `datossaida.dat` a suma da serie (con 5 díxitos decimais) e a matriz a (unha fila en cada liña). **NOTA**: o número de sumandos é $m = 17$.

4. Crea un arquivo de texto `datos3.txt` co seguinte contido:

```
1 2 3 4 5
6 7 8
9 0
1 2 3 4
5 6
```

   Escribe un programa que lea números dende `datos3.txt` mentres que sexan non nulos e os almacene no vector `x`. Este programa debe chamar á función `sumaPrimos(...)`, cos argumentos axeitados, que retorne o número n de elementos primos do vector `x` e a suma s destes elementos primos. Tamén debe retornar unha matriz `a` de orde n con elementos $a_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$, dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} x_i x_j & i + j \text{ par} \\ x_i + x_j & i + j \text{ impar} \end{cases}$$

   Finalmente, o programa debe mostrar por pantalla o vector `x` e a matriz `a`.

Sesión 13: problemas de termodinámica, óptica e mecánica

Traballo en clase

1. **Ecuación de estado de Van der Waals dun gas non ideal**. A ecuación de estado de Van der Waals (**aquí** tes un enlace á súa descripción) dun gas non ideal é:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \tag{57}$$

onde P é a presión (en bares), V é o volume molar (en l/mol), a (en l^2 bar/mol^2) e b (en l/mol) son dúas constantes propias de cada gas, R=0.083145 l $\cdot$ bar/mol $\cdot^o$K é a constante universal dos gases ideais, e T é a temperatura absoluta en ^{o}K. Consideremos o gas cloro Cl_2, para o cal a=6.579 l^2 bar/mol^2, b= 0.05622 l/mol. Da ecuación anterior, como T ten que ser positivo, debe ser $V > b$. Por outro lado, despexando P e considerando que debe ser positiva, temos que:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} > 0 \rightarrow T > \frac{a(V-b)}{RV^2} \tag{58}$$

$$\frac{d}{dV}\left[\frac{a(V-b)}{RV^2}\right] = \frac{2abRV - aRV^2}{R^2V^4} = 0 \rightarrow V = 0, V = 2b \tag{59}$$

Esta función é crecente para $V < 2b$ e decrecente para $V > 2b$, polo tanto usaremos $V > V_{min} = 2b$ e $T > T_{min} = a(V_{min} - b)/RV_{min}^2$. No caso do gas Cl_2 temos que V_{min}=0.11244 l/mol, e T_{min} =351.86 ^{o}K. Representa gráficamente: 1) a presión P frente a V no rango $V_{min} \leq V \leq$0.5 l/mol (100 valores), unha curva para cada valor de T entre T_{min} e $T_{min} + 50^o$K (5 valores); 2) T como función de V (entre V_{min} e 0.5 l/mol) e P (entre 0 e 80 bar); 2) as liñas isotermas; e 3) a temperatura T como un mapa de calor. Tes que obter as gráficas da figura 7:

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from pylab import *

R=0.083145
a,b=6.579,0.05622  # gas cloro Cl_2

Vmin=2*b;Tmin=a*(Vmin-b)/(R*Vmin**2)

nV=100;V=linspace(Vmin,0.5,nV)
nT=5;T=linspace(Tmin,Tmin+50,nT)
P=zeros([nT,nV])

figure(1);clf()
for t in range(nT):
        P[t]=R*T[t]/(V-b)-a/V**2
        s='%.2f ºK' % T[t]
        plot(V,P[t],label=s)
grid(True);xlabel('Volume molar (l/mol)');ylabel('Presión (bar)')
title('Ecuación de Van der Waals - Gas Cloro');legend(loc='lower right');show(False)
savefig('vanderwaals1.eps')

# temperatura función de V e P
def superficie3d(X,Y,Z,xlab,ylab,titulo):
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        fig = figure(2);clf();ax = Axes3D(fig)
```

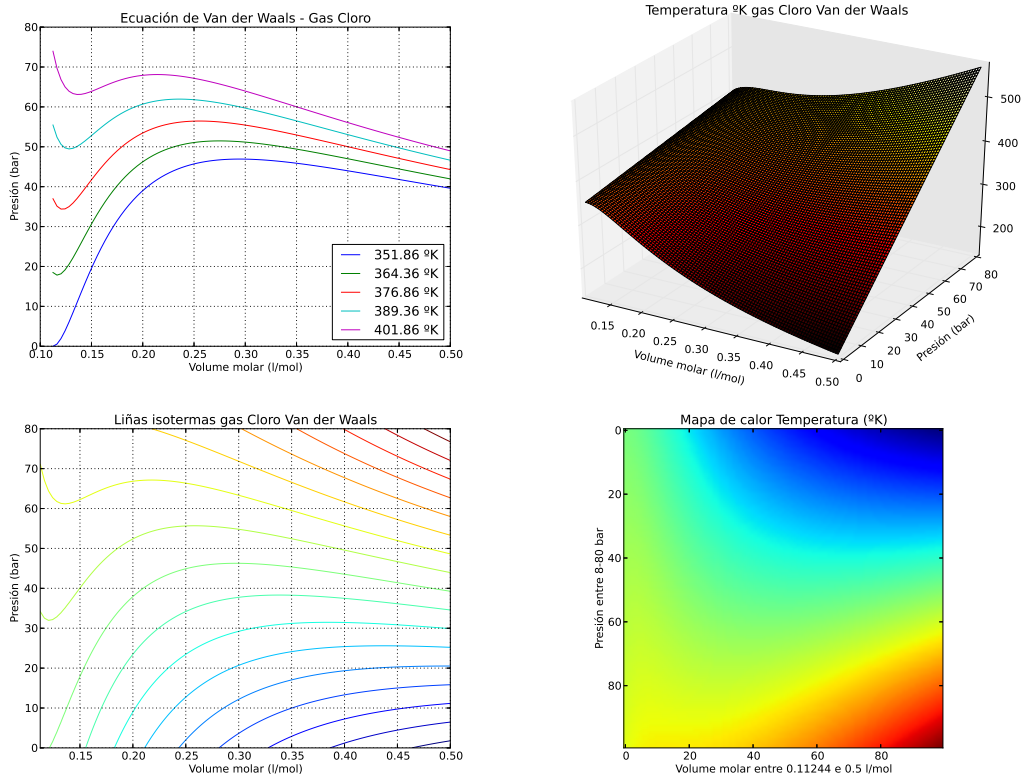


Figura 7: Presión frente a volume, temperatura frente a presión e volume, liñas isotermas e mapa de calor da temperatura frente a presión e volume dadas polas ecuacións de Van der Waals do gas Cl_2.

```
        xlabel(xlab);ylabel(ylab);title(titulo)
        ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap='hot')
        show(False)

P=linspace(0,80,100);
V2,P2=meshgrid(V,P)
T2=(P2+a/V2**2)*(V2-b)/R
superficie3d(V2,P2,T2,'Volume (l)','Presión (bar)','Temperatura ºK gas Cloro Van der Waals')
savefig('vanderwaals2.eps')

# contorno liñas isotermas
def contorno(X,Y,Z,nl,xlab,ylab,titulo):
        figure(3);clf();contour(X,Y,Z,nl)
        xlabel(xlab);ylabel(ylab);title(titulo);grid(True)
        show(False)

contorno(V2,P2,T2,20,'Volume (l)','Presión (bar)','Liñas isotermas gas Cloro Van der Waals')
savefig('vanderwaals3.eps')

# mapa de calor
def mapa_calor(Z,xlab,ylab,titulo):
        figure(4);clf();imshow(Z);xlabel(xlab);ylabel(ylab)
        title(titulo);show(False)

mapa_calor(T2,'Volume (l)','Presión (bar)','Mapa de calor T(V,P)')
savefig('vanderwaals4.eps')
```

2. **Mecánica: traballo realizado por unha forza nunha traxectoria**. Consideremos a forza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ e o traballo W que xera sobre unha traxectoria $\mathbf{r}(t)$ entre dous puntos $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$:

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{60}$$

Consideremos unha traxectoria $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, e unha forza $\mathbf{F} = F_x(x,y)\mathbf{i} + F_y(x,y)\mathbf{j}$, onde x e y son as coordenadas dun punto. Aproximando a integral como unha suma discreta, e considerando os vectores $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ e $\mathbf{y} = (y_0, \ldots, y_{n-1})$ coas coordenadas da traxectoria, o traballo pódese escribir da seguinte forma:

$$W = \sum_{i=1}^{n-1} F_x(x_i, y_i)(x_i - x_{i-1}) + F_y(x_i, y_i)(y_i - y_{i-1}) \tag{61}$$

onde $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} \simeq \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} = (x_i - x_{i-1})\mathbf{i} + (y_i - y_{i-1})\mathbf{j}$. Escribe un programa que calcule o traballo realizado pola forza $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$, medida en Nw., ao longo da traxectoria dada polas ecuacións paramétricas $x(t) = \rho \cos \operatorname{sen} t$, $y(t) = \rho \operatorname{sen} \cos t$, con $\rho = 1$ m., $t = 0 \ldots 2\pi$ s. e Δt=0.1 s. O programa tamén debe mostrar a traxectoria $\{x_i, y_i\}_i$ en 2D e representar o módulo $|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ da forza en 3D e como mapa de calor en 2D. Debes obter as gráficas da figura 8.

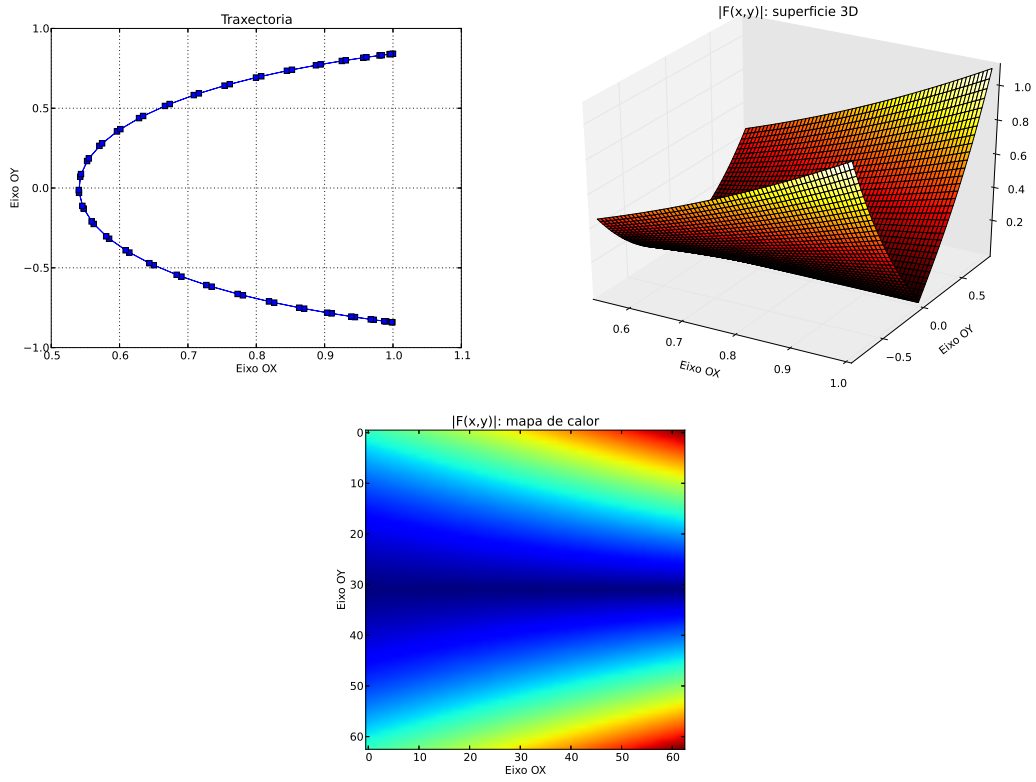


Figura 8: Traxectoria $\mathbf{r}(t)$, módulo da forza $|F(x,y)|$ como superficie en 3D e como mapa de calor no exercicio do traballo.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from pylab import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def forza(x,y):
        f=[x**2*y,x*y**2]
```

```
        return f

def modulo_forza(x,y):
        f=[x**2*y,x*y**2];mf=sqrt(f[0]*f[0]+f[1]*f[1])
        return mf

def traxectoria(t0,t1,dt):
        r=1;t=arange(t0,t1,dt);x=r*sin(cos(t));y=r*cos(sin(t))
        return [x,y]

r=traxectoria(0,2*pi,0.1)
f=forza(r[0],r[1])

w=0;n=shape(r)[1];x=r[0];y=r[1]
for i in range(1,n):
        w=w+f[0][i]*(x[i]-x[i-1])+f[1][i]*(y[i]-y[i-1])
print('W= %g xulios' % w)

figure(1);clf();plot(x,y,'s-');xlabel('Eixo OX');ylabel('Eixo OY')
title('Traxectoria');grid(True);show(False);savefig('traballo1.eps')

def superficie3d(x,y,z,id):
    fig = figure(id);clf()
    ax = Axes3D(fig)
    xlabel('Eixo OX');ylabel('Eixo OY');title('F(x,y): superficie 3D')
    ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap='hot')
    show(False)

xx=linspace(min(x),max(x),n);yy=linspace(min(y),max(y),n)
X,Y=meshgrid(xx,yy)
Z=modulo_forza(X,Y)
superficie3d(X,Y,Z,2)
savefig('traballo2.eps')

figure(3);clf();imshow(Z);xlabel('Eixo OX')
ylabel('Eixo OY');title('F(x,y): mapa de calor');show(False)
savefig('traballo3.eps')
```

3. Un ciclista (de masa m=80 kg, considerando tamén a bicicleta) realiza o percorrido coas alturas $y = f(x)$, en m, dadas polo arquivo alturas.dat (cada valor corresponde a puntos x espazados $\Delta x = 1000$ m entre si). Calcula o traballo que realiza no percorrido mantendo unha velocidade constante $v = 50$ km/h (13.9 m/s), que se alcanza nos primeiros $x_0 = 1000$ m durante $t_0 = 500$ s (8 minutos) nun traxecto plano percorrido a unha altura de 100 m. O coeficiente de rozamento é μ=0.8.

   SOLUCIÓN: O traballo inicial de aceleración no tramo plano, tendo en conta o rozamento, é de:

$$W_0 = F\Delta x = (ma + \mu mg)\Delta x = \left(\frac{mv}{t_0} + \mu mg\right) x_0 = \left(\frac{v}{t_0} + \mu g\right) m x_0 \tag{62}$$

   Unha vez acadada a velocidade v, debe manterse constante durante o traxecto. Sexa α o ángulo de inclinación da estrada: $\alpha < \pi/2$ nas subidas e $\alpha > \pi/2$ nas baixadas, de modo que $\sin\alpha > 0$ sempre, pero $\cos\alpha > 0$ nas subidas e $\cos\alpha < 0$ nas baixadas. Además, $\alpha = \alpha(x)$ e $\tan\alpha(x) = f'(x)$. Dado que:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{|f'(x)|}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} \tag{63}$$

$$\cos\alpha = \frac{s(\tan\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{s[f'(x)]}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} \tag{64}$$

onde $s(t) = 1$ para $t \geq 0$ e $s(t) = -1$ para $t < 0$, de modo que $s[f'(x)] = 1$ se $f'(x) \geq 0$ (pendente positiva) e $s[f'(x)] = -1$ se $f'(x) < 0$ (pendente negativa). Denotemos $d_i = f'(x_i)$ e $r_i = \sqrt{1+d_i^2}$, con $i = 1, \ldots, n$, sendo n o número de valores de x_i lidos dende o arquivo `alturas.dat`. Temos que $\sin\alpha_i = \dfrac{|d_i|}{r_i}$ e $\cos\alpha_i = \dfrac{s_i}{r_i}$, onde $s_i = s(d_i)$. Na subida (ver figura 9) para ter v constante debe ser aceleración nula, de modo que sendo $p = mg$, debe cumprirse:

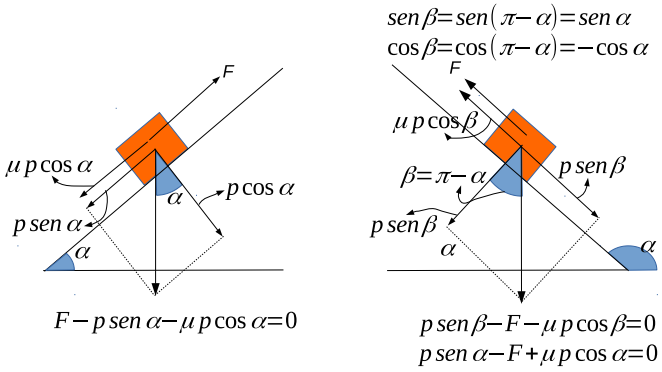


Figura 9: Esquema de forzas na subida (esquerda) e na baixada (dereita).

$$F - p\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mu p\cos\alpha = 0 \to F = p(\mathrm{sen}\,\alpha + \mu\cos\alpha) \tag{65}$$

Na baixada debe ser:

$$p\,\mathrm{sen}\,\alpha - F + \mu p\cos\alpha = 0 \to F = p(\mathrm{sen}\,\alpha + \mu\cos\alpha) \tag{66}$$

É decir, nos dous casos $F = p(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$. Polo tanto, no paso i, con $i = 1, \ldots, n$, a forza F_i ven dada por:

$$F_i = p\left(\frac{|d_i|}{r_i} + \frac{\mu s_i}{r_i}\right) = \frac{p(|d_i| + \mu s_i)}{r_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{67}$$

Para calcular o traballo, temos que:

$$\Delta W = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y \tag{68}$$

Usando que $F_x = F\cos\alpha$, $F_y = F\sin\alpha$, $\Delta y = f'(x)\Delta x$, temos que:

$$\Delta W = F(\cos\alpha + f'(x)\sin\alpha)\Delta x \tag{69}$$

Considerando o paso i, $F = F_i$ e $\cos\alpha = \cos\alpha_i = \dfrac{s_i}{r_i}$, $f'(x_i) = d_i$ e $\sin\alpha = \sin\alpha_i = \dfrac{|d_i|}{r_i}$, de modo que:

$$\Delta W_i = F_i(\cos\alpha_i + f'(x_i)\sin\alpha_i)\Delta x = F_i\left(\frac{s_i}{r_i} + d_i\frac{|d_i|}{r_i}\right)\Delta x \tag{70}$$

Usando que $d_i|d_i| = s_i d_i^2$ e que $r_i = \sqrt{1+d_i^2}$, temos que:

$$\Delta W = \frac{s_i F_i(1+d_i^2)}{r_i}\Delta x = s_i F_i r_i \Delta x \tag{71}$$

Usando F_i definida na ecuación 67 e usando que $s_i|d_i| = d_i$ e que $s_i^2 = 1$, obtemos:

$$\Delta W_i = s_i\frac{p(|d_i| + \mu s_i)}{r_i} r_i \Delta x = p(d_i + \mu)\Delta x \tag{72}$$

O traballo total W pode calcularse como:

$$W = W_0 + \sum_{i=1}^{n}\Delta W_i = W_0 + p\left(\mu n + \sum_{i=1}^{n} d_i\right)\Delta x \tag{73}$$

Escribe un programa en Python que calcule este traballo W en MJ: 1) sumando os traballos ΔW_i; 2) usando a fórmula 73; e 3) o traballo percorrendo esa mesma distancia en plano. O programa tamén debe representar gráficamente: 1) a altura $f_i = f(x_i)$; 2) o traballo $W_i = W_0 + \sum_{j=1}^{i}\Delta W_j$ con $i = 1, \ldots, n$; e 3) a derivada do traballo $W'(x)$.

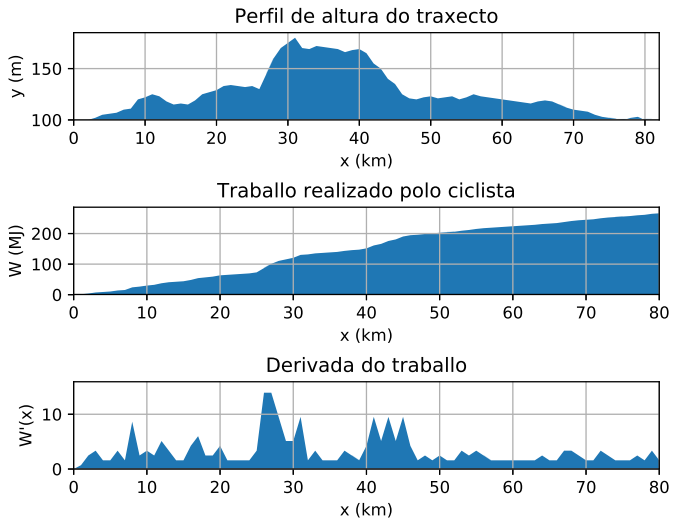


Figura 10: Percorrido e traballo realizado por un ciclista.

```
from numpy import *
from pylab import *
```

```
m=80        # masa (kg)
v=13.9  # velocidade (m/s)
x0=1000 # distancia (m) en coller velocidade 50 km/h
t0=500  # tempo (s) en coller velocidade 50 km/h
mu=0.8  # coeficiente de rozamento
g=9.8       # aceleracion de caida (m/s^2)
dx=1000  # separacion (m) entre puntos

p=m*g
w0=(v/t0+mu*g)*m*x0

f=loadtxt('alturas.dat');
n=len(f);
d=zeros(n);w=zeros(n);w[0]=w0

for i in range(1,n):
        td=(f[i]-f[i-1])/dx;d[i]=abs(td);
        w[i]=w[i-1]+p*(td+mu)*dx

w=1e-6*w
print('Traballo(1)=%.1f MJ.'%w[n-1])

W=w0+p*(mu*n+sum(d))*dx
print('Traballo(2)=%.1f MJ.'%(1e-6*W))

W2=w0+mu*p*n*dx
print('Traballo en plano=%.1f MJ.'%(1e-6*W2))

clf();subplots_adjust(hspace=1)

subplot(311)
#X=range(n);Z=zeros(n);fill_between(X,Z,w)  # alternativa a fill
fill(f)
grid(True);axis([0,n+1,100,max(f)+5])
title('Perfil de altura do traxecto')
xlabel('x (km)');ylabel('y (m)')

subplot(312)
w=append(w,0);fill(w);grid(True)
axis([0,n-1,w[0],max(w)+20])
title('Traballo realizado polo ciclista')
xlabel('x (km)');ylabel('W (MJ)')

subplot(313)
dw=zeros(n);
for i in range(1,n):
        dw[i]=w[i]-w[i-1]
dw=append(dw,0)
fill(dw);grid(True)
axis([0,n-1,0,max(dw)+2])
title('Derivada do traballo')
xlabel('x (km)');ylabel('W\'(x)')

show(False)
```

Traballo a desenvolver polo alumnado

1. **Termodinámica: cálculo de enerxía interna dun sistema**. Un sistema gaseoso dun mol cunha soa compoñente experimenta un proceso adiabático (é decir, sen transferencia de calor) mediante o cal recibe un traballo dado por $dW = \frac{dV}{V} + V^{5/3}dP$, onde o volume V e a presión P mídense en litros e bares respectivamente. Calcula e representa gráficamente, como superficie e como mapa de calor (usa unha función de Python distinta para xerar cada gráfica), a enerxía interna $U(P,V)$ do sistema para $1 \leq P \leq 50$ bar con ΔP=2 bar e $1 \leq V \leq 10$ l. con ΔV =0.5 l.

   Posteriormente, realízase unha transferencia de calor a volume constante dada por $\frac{dQ}{dt} = \mathrm{e}^{-t}$, ao tempo que se segue aportando o traballo dW do apartado anterior, e un axitador aumenta a presión a volume constante sobre o sistema de modo que $\frac{dP}{dt} = (2t - t^2)\mathrm{e}^{-t}$. Calcula e representa gráficamente a enerxía interna U en función do tempo t para $V = 1$ l. e $0.1 \leq t \leq 10$ s. con paso Δt =0.5 s.

   SOLUCIÓN. Polo primeiro principio da termodinámica, temos que $dU = dQ + dW$. No proceso adiabático, $dQ = 0$ de modo que $U = \int dU = \int dW$. Temos que:

$$U = \int dU = \int dW = \int \frac{dV}{V} + \int V^{5/3}dP = \ln V + PV^{5/3} = U(P,V) \tag{74}$$

   No segundo proceso, séguese aportando traballo dW, pero agora a volume constante V= cte = 1 l. e polo tanto $dV = 0$, e como se aporta calor dQ, traballo dW polo tanto:

$$dQ = \mathrm{e}^{-t}dt, \quad dW = dP = (2t - t^2)\mathrm{e}^{-t}dt \tag{75}$$

$$U = \int dQ + \int dW = \int \mathrm{e}^{-t}dt - \int (2t - t^2)\mathrm{e}^{-t}dt = -\mathrm{e}^{-t} + t^2\mathrm{e}^{-t} = (t^2 - 1)\mathrm{e}^{-t} = U(t) \tag{76}$$

   O programa fica así:

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from pylab import *


# U función de V e P
def superficie3d(X,Y,Z,id,xlab,ylab,titulo):
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        fig = figure(id);clf();ax = Axes3D(fig)
        xlabel(xlab);ylabel(ylab);title(titulo)
        ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap='hot')
        show(False)

p=arange(1,50,2);v=arange(1,10,0.5)
V,P=meshgrid(v,p);U=log(V)+P**2*V**(5/3)/2

superficie3d(V,P,U,1,'Volume V (l)','Presión P (bar)','Enerxía interna U (Xulios)')
savefig('enerxia1.eps')

def mapa_calor(Z,id,xlab,ylab,titulo):
        figure();clf();imshow(Z);xlabel(xlab);ylabel(ylab)
        title(titulo);show(False)

mapa_calor(U,2,'Volume (l)','Presión (bar)','Mapa de calor U(V,P)')
savefig('enerxia2.eps')
```

```
figure();clf()
t=arange(0.1,10,0.5)
U=(t**2-1)*exp(-t)
plot(t,U,'sb-')
xlabel('tempo (s.)');ylabel('U(t) (Xulios)');title('Enerxía interna U(t)')
grid(True);show(False)
savefig('enerxia3.eps')
```

Tes que obter as gráficas na figura 11:

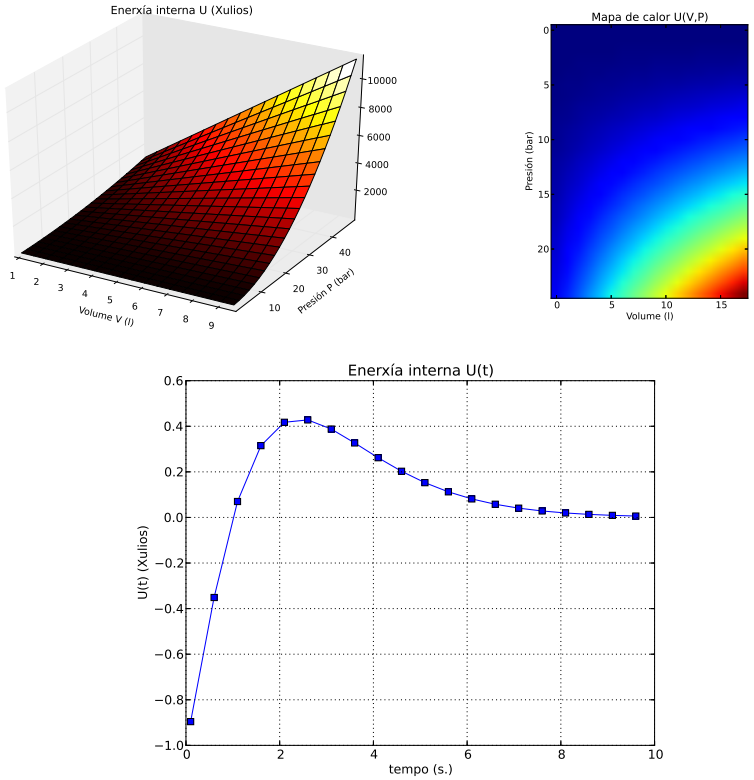


Figura 11: Enerxía interna U en función da presión e volume en 3D e como mapa de calor, e enerxía interna como función do tempo.

2. **Óptica: cálculo e representación gráfica das perturbacións provocadas por pulsos cortos de luz láser**. Esta perturbación ξ ten a seguinte expresión (ver R.W. Ditchburn, Óptica, páxs. 719-720):

$$\xi(t,z) = \sqrt{\frac{a^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi N c \Delta t}{2L}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi c \Delta t}{2L}\right)}}, \quad \Delta t = t - \frac{nz}{c} \tag{77}$$

onde a=1 é a amplitude do pulso, N=49 é o número de modos menos 1, c=300000 km/s é a velocidade da luz, L=100 mm é a lonxitude do láser, n=1.4 é o índice de refracción do medio e z é a coordenada espacial. Representa gráficamente nun mapa de calor $\xi(t,z)$ con 50 valores de t e z entre 1 e 10 s., e entre 0 e 100 mm, respectivamente. Tes que obter a gráfica da figura 12:

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from pylab import *
```

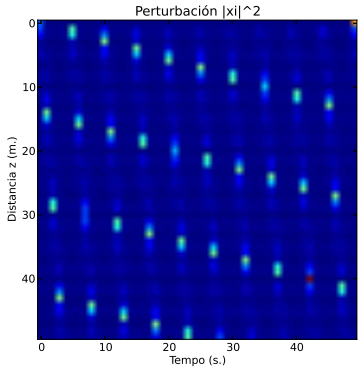


Figura 12: Perturbación $\xi(t,z)$ en función do tempo e da distancia z.

```
a=1;  #amplitude da luz
N=49 #N=(nº de modos)-1
nm=1.4  #índice de refracción do medio
c=3E8 # velocidade da luz
Lt=10;nt=50  #intervalo temporal e nº de valores temporais
Lz=100;L2=2*Lz;nz=50  # lonxitude do láser e nº de puntos

t=linspace(1,Lt,nt);z=linspace(0,Lz,nz);
T,Z=meshgrid(t,z);dt=T-nm*Z/c
xi=sqrt(a**2*sin(pi*N*c*dt/L2)**2/sin(pi*c*dt/L2)**2)

clf();imshow(xi);xlabel('Tempo (s.)');ylabel('Distancia z (m.)');
title('Perturbación |xi|^2');show(False);savefig('laser.eps')
```

3. **Centro de masas dun sistema de partículas**. O centro de masas (ou de gravidade) **c** dun sistema de partículas (ou dunha distribución de masa) está dado, para unha distribución discreta (é decir, un sistema de n partículas de masas $\{m_i\}_1^n$ e posicións $\{\mathbf{r}_i\}_1^n$), e para unha distribución de masa continua m, polas seguintes expresións:

$$\mathbf{c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i, \qquad \mathbf{c} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} \tag{78}$$

No caso continuo, dado que $dm = \rho(\mathbf{r})dV$, temos que:

$$\mathbf{c} = \frac{\int_V \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})dV}{\int_V \rho(\mathbf{r})dV} \tag{79}$$

Nos casos uni-, bi- e tri-dimensional, temos:

$$c = \frac{\int x\rho(x)dx}{\int \rho(x)dx}, \quad \mathbf{c} = \frac{\iint_S (x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\rho(x,y)dxdy}{\iint_S \rho(x,y)dxdy}, \mathbf{c} = \frac{\iiint_V (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})dxdydz}{\iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz} \tag{80}$$

A aproximación discreta a estas integrais son:

$$c = \frac{\sum_{i<n} x_i\rho_i}{\sum_{i<n}\rho_i}, \quad \mathbf{c} = \frac{\sum_{i<n}\sum_{j<n}(x_i\mathbf{i}+y_j\mathbf{j})\rho_{ij}}{\sum_{i<n}\sum_{j<n}\rho_{ij}}, \mathbf{c} = \frac{\sum_{i<n}\sum_{j<n}\sum_{k<n}(x_i\mathbf{i}+y_j\mathbf{j}+z_k\mathbf{k})\rho_{ijk}}{\sum_{i<n}\sum_{j<n}\sum_{k<n}\rho_{ijk}} \tag{81}$$

Escribe un programa que calcule o centro de masas de:

a) Lea un número enteiro n por teclado (proba con $n = 3$) e calcule aleatoriamente coordenadas $\{x_i, y_i, z_i\}_1^n$ con valores entre -10 e +10, para un sistema de n partículas con masas $\{m_i\}_1^n$ com $1 \leq m_i \leq 10$ kg.

b) Calcule o centro de masas c para este sistema discreto considerando so as coordenadas $\{x_i\}_1^n$ (caso unidimensional).

c) Calcule o centro de masas $\mathbf{c} = (c_x, c_y)$ para este sistema considerando as coordenadas $\{x_i, y_i\}_1^n$ (caso discreto bidimensional).

d) Calcule o centro de masas $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ para este sistema considerando as coordenadas $\{x_i, y_i, y_i\}_1^n$ (caso discreto tridimensional).

e) Unha distribución continua unidimensional dada por $\rho(x) = \dfrac{\arc\cos(x)}{1+x^2}$ con $-1 \leq x, y \leq 1$ e $\rho(x, y) = 0$ noutro caso (debes obter c=-0.207).

f) Unha distribución continua bidimensional dada por $\rho(x, y) = \exp(-(x-1)^2 - (y-1)^2)$ con $-1 \leq x \leq 3$ (debes obter $\mathbf{c} = (1, 1)$).

g) Unha distribución continua tridimensional dada por $\rho(x, y, z) = \mathrm{e}^{-r^2}(1 + \operatorname{sen} 10r)$, sendo $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, con $-2 < x, y, z < 2$

Tes que obter as gráficas da figura 13.

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import *
from pylab import *
from  mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

n=int(input('numero de particulas? '))
n=10
x=zeros(n);y=zeros(n);z=zeros(n);m=zeros(n)
for i in range(n):
        x[i]=int(-10+20*random());y[i]=int(-10+20*random())
        z[i]=int(-10+20*random());m[i]=int(1+10*random())
M=sum(m)

#-- caso unidimensional--------------------------------
c=sum(x*m)/M
print('discreta 1D: c=',c)
figure(1);clf()
plot(x,m,'sb',label='masas');plot(c,M,'dr',markersize=20,label='centro masas')
axis([min(x)-1,max(x)+1,min(m)-1,sum(m)+1])
xlabel('coordenada X');ylabel('masa (kg.)')
legend(loc='upper right')
title(u'distribucion discreta - 1D');grid(True);show(False)
savefig('centro_masas_discreto_1d.eps')

#-- caso bidimensional--------------------------------
c=[sum(x*m),sum(y*m)]/M
print('discreta 2D: c=',c)
figure(2);clf();plot(x,y,'sb',label='masas');plot(c[0],c[1],'dr',markersize=20,label='centro masas')
tx=hstack([x,c[0]]);ty=hstack([y,c[1]])
```

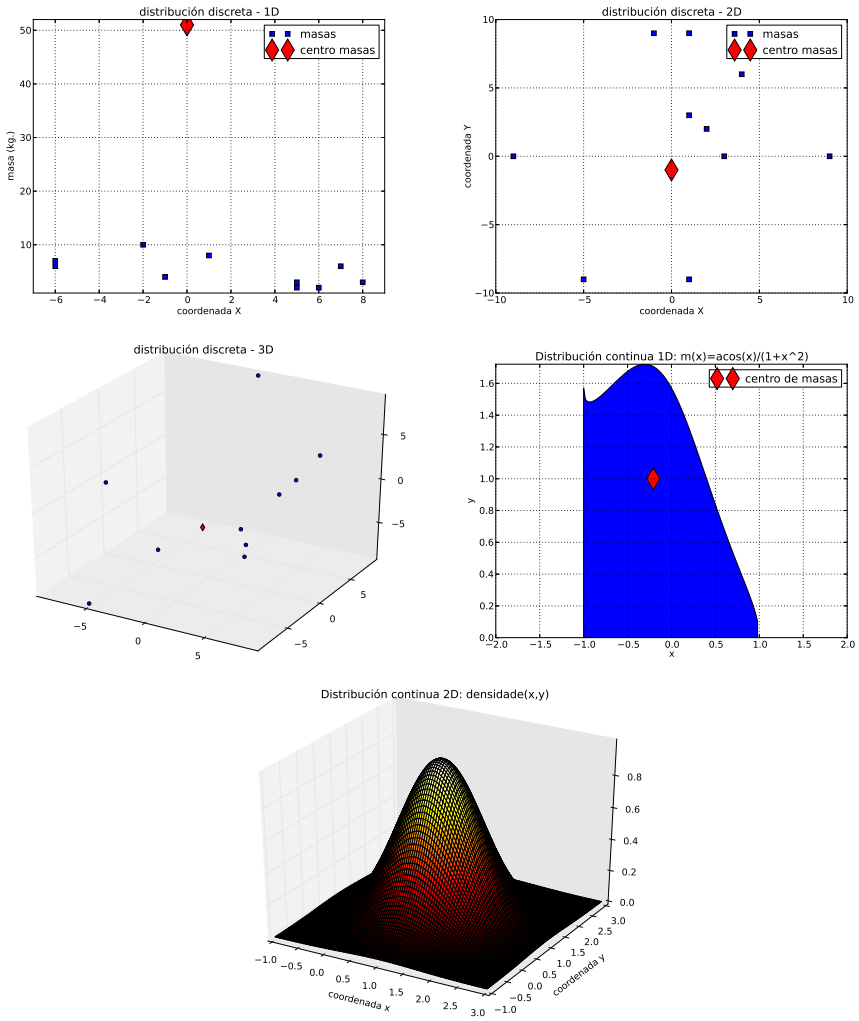


Figura 13: Centro de masas dunha distribución discreta 1D, 2D e 3D, e continua 1D e 2D.

```
axis([min(tx)-1,max(tx)+1,min(ty)-1,max(ty)+1])
xlabel('coordenada X');ylabel('coordenada Y')
legend(loc='upper right')
title(u'distribucion discreta - 2D');grid(True);show(False)
savefig('centro_masas_discreto_2d.eps')

#-- caso tridimensional--------------------------------
c=[sum(x*m),sum(y*m),sum(z*m)]/M
print('discreta 3D: c=',c)
f=figure(3);ax=Axes3D(f)
ax.scatter(x,y,z);ax.scatter(c[0],c[1],c[2],s=40,c='r',marker='d')
legend(loc='upper right')
title(u'distribucion discreta - 3D');show(False)
savefig('centro_masas_discreto_3d.eps')

#distribucion continua 1-D-----------------------------
a=-1.;b=1.;n=100;h=(b-a)/n;x=[];y=[];t=a
numer,denom=0,0  #n=numero de puntos no intervalo
while t<b:
        u=arccos(t)/(1+t**2);
        x.append(t);y.append(u)
```

```
        numer+=t*u;denom+=u;t=t+h
c=numer/denom
print('continua 1D: c=',c)
figure(4);clf();
fill_between(x,y)
plot(c,1,'dr',markersize=20,label='centro de masas')
axis([-2,2,0,max(y)])
xlabel('x');ylabel('y');title(u'Distribucion continua 1D: m(x)=acos(x)/(1+x^2)')
legend(loc='upper right')
grid(True);show(False)
savefig('centro_masas_continuo_1d.eps')

#distribucion continua 2-D-----------------------------
a=-1.;b=3.;n=100;x=linspace(a,b,n);y=x.copy();c=zeros(2)
X,Y=meshgrid(x,y);M=exp(-(X-1)**2-(Y-1)**2);denom=0;px=0;py=0
for i in range(n):
        tx=x[i]
        for j in range(n):
                ty=y[j];t=exp(-(tx-1)**2-(ty-1)**2)
                px+=tx*t;py+=ty*t;denom+=t
c=[px,py]/denom
print('continua 2D: c=',c)
f=figure(5);clf();ax=Axes3D(f)
ax.plot_surface(X,Y,M, rstride=1, cstride=1, cmap='hot')
ax.scatter(c[0],c[1],0,s=40,c='r',marker='s')
xlabel('coordenada x');ylabel('coordenada y');title(u'Distribucion continua 2D: densidade(x,y)')
show(False);savefig('centro_masas_continuo_2d.eps')
```