FORMULACIÓN DO CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

ECUACIÓS DE MAXWELL NO ESPACIO LIBRE

A definición de partida dos campos eléctrico **E** e magnético **B** básase na *forza de Lorentz* sobre unha carga puntual q movéndose con velocidade **u**:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}) \tag{1.1}$$

A non ser no caso estático, **E** e **B** non existen independentemente, senon solo combinados formando o *campo electromagnético*. As relaciós entre **E** e **B**, e deles coas fontes ρ e **J**, están dadas polas *ecuaciós de Maxwell*

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad & \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0 \qquad & \nabla\times\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.2}$$

As constantes ε_0 e μ_0, características do espacio libre, chámanse respectivamente *permitividade eléctrica* e *permeabilidade magnética* do espacio libre.

FONTES DO CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Según o teorema de Helmholtz [1], un campo vectorial **F** definido nun volumen V pódese expresar como

$$\mathbf{F} = \nabla\psi + \nabla\times\mathcal{A}, \tag{1.3}$$

sendo [2]

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\mathbf{F}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' + \chi \quad \text{e} \tag{1.4 a}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\mathbf{F}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' \tag{1.4 b}$$

e χ unha certa solución da ecuación de Laplace, determinada salvo unha constante pola compoñente normal do campo na superficie:

$$\begin{gathered} \nabla^2\chi = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}\cdot(\nabla\psi + \nabla\times\mathcal{A})|_{S'} = \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{F}'|_{S'} \end{gathered} \tag{1.4 c}$$

As primas nos campos e conxutos de definición (volumen, superficie...) significan que están definidos en *puntos fonte*, e nos operadores, que operan sobre estes puntos fonte.

$\nabla\cdot\mathbf{F}$ chámase *fonte escalar* de **F**, e $\nabla\times\mathbf{F}$, *fonte vectorial* de **F**.

---

[1] Docencia / Asignatura de Electromagnetismo / Tcampos3, en http://www.usc.es/fagms/.

[2] O teorema de Helmotz describe a dependencia *espacial* dun campo vectorial tridimensional definido nun volumen tamén tridimensional. V e V' representan *o mesmo volumen físico*, pero descrito por conxuntos de coordenadas distintos (vector **r** e en V e vector **r**´ en V'). As magnitudes sin primas supóñense funciós de **r**. As magnitudes con primas serán funciós de **r**´. Cando non haxa ambigüedade, poderanse omitir as primas. Un operador diferencial representa derivadas con respecto ás compoñentes de **r** ou de **r**´, según non leve ou leve prima, respectivamente.

Se $\nabla\cdot\mathbf{F}$ e $\nabla\times\mathbf{F}$ decaen a grandes distancias máis rápidamente ca $1/r'^2$, V' póde ser todo o espacio. Neste caso χ é unha constante calquera, e o seu gradente é cero.

Defínense as compoñentes *lonxitudinal ou irrotacional*, $\mathbf{F}_L$ e *transversal ou solenoidal*, $\mathbf{F}_T$ dun campo $\mathbf{F}$ polas relaciós seguintes

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{F}_L &= \nabla\cdot\mathbf{F}\\ \nabla\times\mathbf{F}_L &= 0\end{aligned}\right\} \qquad\qquad \left.\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{F}_T &= 0\\ \nabla\times\mathbf{F}_T &= \nabla\times\mathbf{F}\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

A relación (1.3) é unha descomposición única $\mathbf{F} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_T$ do campo. Está claro que

$$\mathbf{F}_L = \nabla\psi \qquad\qquad \mathbf{F}_T = \nabla\times\mathcal{A} \tag{1.6}$$

As fontes escalares producen campos lonxitudinales, e as fontes vectoriales producen campos transversales.

Exemplo

O campo electrostático é lonxitudinal. O campo magnético $\mathbf{B}$ é sempre transversal, independentemente de que sea estático ou non. No espacio libre en ausencia de fontes tamén $\mathbf{E}$ é transversal ($\rho = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{E} = 0$). Debido a esto é consistente dicir que as ondas electromagnéticas, formadas por dous campos transversales, son *transversales* [3].

Desde un punto de vista clásico, as fontes do campo electromagnético ρ e $\mathbf{J}$ teñen naturaleza continua, dando lugar a campos continuos e derivables. Pero nalgús problemas é ventaxoso usar *modelos matemáticos* discontinuos que teñen un tratamento matemático específico [4]. Neste caso aparecen singularidades nas distribuciós de carga e corrente (distribuciós *superficiales*, *lineales* e *puntuales*) En todo caso, a formulación matemática é o límite da correspondente á distribución continua, polo que os desenrolos matemáticos teóricos nesta asignatura suporán normalmente distribuciós continuas.

Según (1.2) ρ e $\mathbf{J}$ son as fontes do campo electromagnético [5]. A fonte escalar é a *densidade de carga*. Defínese como o campo escalar ρ tal que a carga Q contida nun volumen V' sea

$$Q = \int_{V'} \rho\, dv' \quad , \quad \forall V' \tag{1.7}$$

A fonte vectorial é a *densidade de corrente* $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \sum_i \rho_i \langle \mathbf{v}_i \rangle \tag{1.8}$$

sendo i un índice que denota os tipos de portadores móviles de carga e $\langle\mathbf{v}\rangle_i$ o campo de velocidades promediadas da distribución ρ_i.

As fontes escalar e vectorial están relacionadas pola *ecuación de continuidade*:

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{1.9}$$

---

[3] A pesar de que poidan ter unha compoñente na dirección de propagación. Estudiaranse algunhos destes casos.

[4] Docencia/Asignatura de Electromagnetismo, Cap.1 e Cap. 6.

[5] Independentemente de que o campo poida existir tamén con $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$. As constantes multiplicativas ε_0 e μ_0 son irrelevantes na definición das fontes. De feito a súa introducción depende do sistema de unidades usado.

que expresa matemáticamente o feito experimental da conservación da carga [6].

Débese notar que a ecuación de continuidade non é independente das ecuaciós de Maxwell, senon que se póde deducir delas:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0 = \mu_0 \left[\nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = \mu_0 \left[\nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \right] = \mu_0 \left[\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right]$$

ECUACIÓS DE MAXWELL EN MEDIOS CONTINUOS

Medio continuo é un medio material considerado desde un punto de vista macroscópico, no que se definen unhos *campos macroscópicos* como algún tipo de promedio dos campos e magnitudes microscópicos sobre volúmenes suficientemente grandes pra que se poidan despreciar as variaciós espaciales a nivel atómico e as fluctuaciós temporales térmicas.

A contribución do medio ós campos pódese expresar en función da *polarización* **P** e a *imanación* **M**, definidas polas relaciós

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_{V'} \mathbf{P}\, dv' \\ \mathbf{m} &= \int_{V'} \mathbf{M}\, dv' \end{aligned}\right\} \quad , \quad \forall V' , \tag{1.16}$$

onde **p** é o *momento dipolar eléctrico* e **m** o *momento dipolar magnético* do volumen *V´*.

Os campos (macroscópicos) **E** e **B** pódense definir no medio material de forma compatible cos correspondentes fóra del introducindo as *fontes ligadas de polarización* ρ_p e $\mathbf{J}_p$ e *de imanación* $\mathbf{J}_m$

$$\begin{gathered} \rho_p = -\nabla' \cdot \mathbf{P} \quad ; \quad \mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} , \\ \mathbf{J}_m = \nabla' \times \mathbf{M} \end{gathered} \tag{1.16}$$

Desta maneira, as ecuaciós de Maxwell (1.2) conservan a validez prós campos *macroscópicos* **E** e **B** en medios materiales, supoñendo que en ρ e **J** se inclúen as cargas e correntes ligadas:

$$\begin{gathered} \rho = \rho_f + \rho_p \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_m . \end{gathered} \tag{1.19}$$

As densidades de carga ρ_f e de corrente $\mathbf{J}_f$ que non son ligadas chámanse *libres*.

Defínindo os campos desplazamento eléctrico **D** e excitación ou intensidade magnética **H** polas relaciós

$$\begin{gathered} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{gathered} \tag{1.16}$$

obtéñense as *ecuaciós de Maxwell macroscópicas*

[6] A única maneira de que cambie a carga contida nun volumen é que entre ou saila pola superficie que o limita.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.17}$$

Pra determinar un campo vectorial necesítase conocer del a diverxencia e o rotacional. Consecuentemente os catro campos **E**, **D**, **B** e **H** (cada un tén tres compoñentes) non se póden determinar en función das fontes libres con solo as catro relaciós (1.17).

Logo é necesario completalas con outras dúas. Son as *ecuaciós constitutivas*, características do medio, normalmente da forma **D**(**E**) e **B**(**H**) ou **P**(**E**) e **M**(**H**), e que dependen das propiedades do medio concreto.

Fontes aplicadas e inducidas.

Son aplicadas as cargas e correntes que se introducen nun sistema electromagnético e sobre as que se tén control (por exemplo, a carga que se aplica a un condensador, a corrente que se fai circular por un conductor), e inducidas se aparecen como consecuencia da reacción do sistema ás fontes aplicadas (como as cargas superficiales nos conductores sometidos a campos electrostáticos, ou as correntes inducidas en conductores por campos magnéticos variables).

Fontes reales e virtuales

As cargas e correntes chámanse *reales*, cando existen físicamente, e *virtuales* ou *equivalentes*, cando se trata de artificios matemáticos, como as cargas imaxen, pra resolver un determinado problema.

CONDICIÓS DE FRONTEIRA

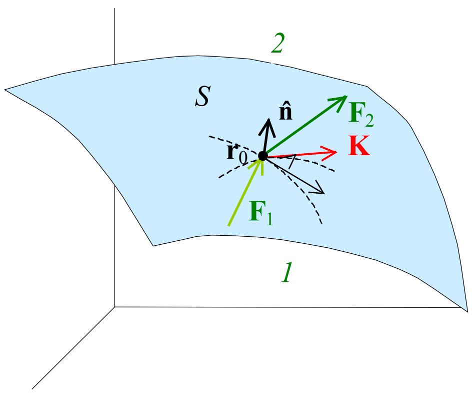

Fig. 1.1

Supoñamos un campo **F** definido en dous medios V_1 e V_2 separados por unha superficie S, admitindo que **F** poida ser discontinuo en S. Como consecuencia desta discontinuidade aparecen *singularidades superficiales* nas distibuciós de carga e corrente [7], que póden considerarse como o límite de distribuciós volúmicas concentradas na superficie.

Nas ecuaciós que siguen suponse que $\mathbf{F}_1|_S$ e $\mathbf{F}_2|_S$ son os valores límite dun campo $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ cando $\mathbf{r}$ tende a un certo punto $\mathbf{r}_0$ da superficie S, desde os medios respectivos, e $\hat{\mathbf{n}}$ a normal á superficie nese mesmo punto $\mathbf{r}_0$, dirixida cara ó medio *2* (fig. 1).

Das ecuaciós de Maxwell obtemos as seguintes condiciós de fronteira:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$
$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$$
$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \qquad \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_0 \mathbf{K}$$
$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f \tag{1.18}$$

[7] Docencia / Asignatura de Electromagnetismo / Tcampos3.

onde as *densidades superficiales de carga* σ representa as singularidades superficiales de ρ, e as *densidadedes superficiaes de corrente* **K** representan as singularidades superficiales de **J**.

Da ecuación de continuidade dedúcese unha condición de fronteira prá densidade de corrente. Se non hai correntes superficiales, ténse

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1\right)\Big|_S = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{1.19}$$

As fontes superficiales tamén póden ser libre ou ligadas, e cumplen as relaciós [8]

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_f + \sigma_p \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}_f + \mathbf{K}_m. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Ecuaciós de Maxwell en medios lineales

Un medio é lineal desde os puntos de vista eléctrico, magnético e de conducción de corrente se cumplen as ecuaciós constitutivas lineales seguintes: [9]

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J}_f &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \tag{1.21}$$

sendo ε e μ, e σ no caso máis xeneral, magnitudes de tipo tensorial que dependen do punto do espacio [10]. Levando esto ás ecuación de Maxwell, obtemos un sistema de ecuaciós, na forma igual ca o inicial, pero onde xa se poden determinar os campos en función das fontes. Nun medio homoxéneo, lineal e isótropo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon} \qquad & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad & \nabla \times \mathbf{B} = \mu\left(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{1.22}$$

Formulación equivalente: Fontes eléctricas e magnéticas

Os campos electromagnéticos son producidos por cargas e correntes libres eléctricas. Pero moitos problemas simplifícanse introducindo, como *fontes virtuales*, unhas unhas *cargas e correntes magnéticas* ficticias.

Supoñamos que os campos producidos polas cargas eléctricas ρ_f e as correntes eléctricas $\mathbf{J}_f$ son *de tipo eléctrico*, e distingámolos co superíndice $^{(E)}$. Cumplirán as ecuaciós de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}^{(E)} = \rho_f \qquad & \nabla \times \mathbf{E}^{(E)} = -\frac{\partial \mathbf{B}^{(E)}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^{(E)} = 0 \qquad & \nabla \times \mathbf{H}^{(E)} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}^{(E)}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.23}$$

[8] Supoñendo a polarización finita, non aparece ningunha corrente superficial de polarización.

[9] Aquí σ representa a conductividade.

[10] Excluiremos a posibilidade de que ε teña dependencia temporal .

As ecuación dos campos *de tipo magnético* deberían ser

$$\nabla\cdot\mathbf{D}^{(M)}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{E}^{(M)}=-\mathcal{M}_f-\frac{\partial\mathbf{B}^{(M)}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}^{(M)}=-\rho_M \qquad \nabla\times\mathbf{H}^{(M)}=\frac{\partial\mathbf{D}^{(M)}}{\partial t} \tag{1.24}$$

Os campos totales serán a suma dos de tipo eléctrico e os de tipo magnético:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{(E)}+\mathbf{E}^{(M)} \quad \mathbf{D}=\mathbf{D}^{(E)}+\mathbf{D}^{(M)}$$
$$\mathbf{B}=\mathbf{B}^{(E)}+\mathbf{B}^{(M)} \quad \mathbf{H}=\mathbf{H}^{(E)}+\mathbf{H}^{(M)} \tag{1.25}$$

As ecuaciós que cumplen obtéñense sumando (1.29) e (1.30)

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f \qquad \nabla\times\mathbf{E}=-\mathcal{M}_f-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}=-\rho_M \qquad \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.26}$$

A posibilidade de fontes magnéticas esixe modificar as condiciós de fronteira dos campos. Se $\mathcal{M}_s$ é a corrente superficial magnética e σ_M a densidade superficial de carga magnética,

$$\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=-\mathcal{M}_s \quad ; \quad \hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=-\sigma_M \tag{1.27}$$

As correntes magnéticas non existen físicamente, pero póden representar as *forzas electromotrices* de orixen non electromagnético. Se o campo magnético é constante, a integral de circulación de **E** sobre unha curva cerrada, calculada a partir de (1.2), é cero. Pero facendo

$$\varepsilon=\oint_C\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=-\int_S\left(\mathcal{M}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{a} \tag{1.28}$$

admítese a posibilidade de ter circulación non nula tamén no caso de **B** constante.

En medios lineales a corrente libre $\mathbf{J}_f$ póde ser descomposta nunha corrente *aplicada* $\mathbf{J}_A$ e unha corrente *inducida* $\sigma\mathbf{E}$. A corrente magnética póde ser considerada toda aplicada. Os rotacionales dos campos quedan, en consecuencia

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_A+(\sigma+i\omega\varepsilon)\mathbf{E}$$
$$\nabla\times\mathbf{E}=-\mathcal{M}_A-i\omega\mu\,\mathbf{H} \tag{1.29}$$

POTENCIALES ELECTROMAGNÉTICOS

Os campos electromagnéticos con sentido físico son **E** e **B**. As ecuaciós de Maxwell, unidas ás definiciós dos campos **D** e **H**, conteñen todo o electromagnetismo clásico. A partir delas defínense unhos campos en sentido matemático que son os *potenciales electromagnéticos*. Deduciremos unhas condiciós *suficientes* que nos permiten definir estes potenciales.

Se, de acordo con (1.3), facemos $\mathbf{B}=\nabla\psi+\nabla\times\mathbf{A}$, de $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ dedúcese $\nabla^2\psi=0$. Logo, se ψ non é uniforme, debe ter singularidades, ou diverxer no infinito [11], o que conduciría respectivamente a que **B** tén singularidades ou non tende a cero no infinito [12]. Como solo se usaron as ecuaciós homoxéneas, ψ non depende das fontes, polo que estas hipotéticas

[11] Basta considerar a dependencia radial das soluciós da ecuación de Laplace en coordenadas esféricas.

[12] É *conveniente* supoñer que **E** e **B** non teñen singularidades independentes das fontes, e que en puntos alonxados delas (o que se chama "o infinito") ténden a cero.

singularidades de **B** non póden ser consecuencia de singularidades das fontes, logo concluimos que é uniforme. Consecuentemente,

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \tag{1.30}$$

A chámase *potencial vectorial*. Ademáis

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A}) = -\nabla\times\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0\,.$$

O paréntesis na última ecuación debe ser o gradente dun *potencial escalar*:

$$\left(\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\nabla\phi\,. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{1.31}$$

Os campos ϕ e **A** que cumplen (1.36) e (1.37) son os *potenciales electromagnéticos*.

FORMULACIÓN DO ELECTROMAGNETISMO EN FUNCIÓN DOS POTENCIALES

As ecuaciós inhomoxéneas de Maxwell estarán garantizadas se impoñemos condiciós adicionales ós potenciales. Consideremos campos no espacio libre. Expresándoos en función dos potenciales:

$$-\nabla\cdot\mathbf{E} = \nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\mathbf{J} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right]$$

resultan dúas ecuaciós

$$\begin{gathered}\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\end{gathered} \tag{1.32}$$

que, suposto que **E** e **B** estean dados por (1.30) e (1.31), constitúen unha *formulación do Electromagnetismo en función dos potenciales* equivalente ás ecuaciós de Maxwell no espacio libre. Nótese que de (1.30), (1.31) e (1.32) é posible deducir as ecuaciós de Maxwell.

TRANSFORMACIÓS DOS POTENCIALES

Xa indicamos que os campos físicos son **E** e **B**. Estes campos deben ser os mesmos pra calquera par de potenciales ϕ e **A** que usemos. Pero inda queda moita arbitrariedade na determinación dos potenciales. Sean

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}$$
$$\phi' = \phi + \beta$$

outros potenciales que cumplan tamén (1.30) e (1.31).

Como $\nabla\times\mathbf{A}' = \nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\nabla\times\boldsymbol{\alpha} = 0$. Ou, equivalentemente

$$\boldsymbol{\alpha} = \nabla\lambda',$$

sendo $\lambda'(\mathrm{r}, \mathrm{t})$ algún campo escalar, que póde depender do tempo. Xa que ϕ' e $\mathbf{A}'$ deben representar o mesmo campo eléctrico ca ϕ e $\mathbf{A}$,

$$0 = \nabla(\phi' - \phi) + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = \nabla\left(\beta + \frac{\partial \lambda'}{\partial t}\right).$$

Un campo con gradente nulo debe ser unifome (constante no espacio), pero non á forza constante no tempo. Sea

$$\beta + \frac{\partial \lambda'}{\partial t} = k(t) \quad \Rightarrow \quad \beta = k(t) - \frac{\partial \lambda'}{\partial t} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

(tomando $\lambda = \lambda' - \int_0^t k\, dt'$ non cambiamos a dependencia espacial, co que $\boldsymbol{\alpha} = \nabla\lambda' = \nabla\lambda$). En definitiva, resultan as relaciós

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

chamadas *transformaciós de representación* (tamén *de norma*, *de calibración*, *de contraste* ou *"gauges"*), que converten unhos potenciales noutros equivalentes desde o punto de vista físico.

As magnitudes electromagnéticas que non cambian anque os potenciales se transformen según (1.33) chámanse *invariantes gauge*. Tódalas magnitudes con sentido físico deben ser invariantes *gauge*.

Representación de Coulomb

Coa *condición de Coulomb* $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) \end{aligned} \tag{1.34}$$

Esto aporta unha simplificación notable no cálculo do potencial escalar ϕ, pero xeneralmente complica o do potencial vectorial. En electrostática e magnetostática temos

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}$$

En xeneral, usando a ecuación de continuidade e facendo $\mathbf{J} = \mathbf{J}_L + \mathbf{J}_T$, e as relaciós (1.5),

$$\nabla\cdot\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} = \nabla^2\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\mathbf{J}_L$$

$$\nabla\times\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\times\mathbf{J}_L = 0$$

Con esto o teorema de Helmholtz permite escribir

$$\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{J}_L + \nabla\chi\,,$$

por suposto impoñendo que $\nabla^2\chi = 0$. Pola construcción dos potenciales, esta indeterminación χ non debe afectar ós campos, e consecuentemente podemos facer $\chi = 0$.

Supoñendo esto, a o potencial vectorial queda en función de solo a compoñente transversal da corrente $\mathbf{J}_T$:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_T \tag{1.35}$$

Por esto a representación de Coulomb se chama tamén *gauge transversal*.

Representación de Lorenz

A máis usada en Electrodinámica é a *representación de Lorenz*. Resulta de impoñerlle ós potenciales a *condición de Lorenz*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{1.36}$$

Con esto temos dúas ecuaciós formalmente iguales prós potenciales escalar e vectorial, que resultan ser as dúas *ecuaciós de ondas*:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \tag{1.37}$$

Débese observar que unha transformación do tipo (1.33), sendo λ unha solución da *ecuación de ondas* homoxénea:

$$\nabla^2 \lambda - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = 0$$

respeta a condición de Lorenz. Consecuentemente, na representación de Lorenz os potenciales non son únicos.