FORMULACIÓN TENSORIAL DO ELECTROMAGNETISMO

Unha relación entre magnitudes tensoriales que é válida en tódolos sistemas de referencia inerciales chámase *covariante*. Chamamos *formulación covariante* [1] do electromagnetismo ó conxunto de ecuaciós covariantes no espacio de Minkowski que equivalen ás ecuaciós dos campos e potenciales en tres dimensiós espaciales e dependentes do tempo.

Seguiremos o procedemento iniciado no tema anterior, que consiste en *construir* magnitudes tensoriales (invariantes, cadrivectores, tensores de orden superior) das que se conoce a lei de transformación.

Transformaciós de campos

Igual que un *suceso elemental* (t, $\mathbf{r}$) nun sistema de referencia Σ toma un valor (t', $\mathbf{r}'$) noutro sistema Σ', un campo **F** en Σ terá un valor **F**$'$ en Σ'. A transformación de Lorentz opera facendo

$$\mathbf{F}(t,\mathbf{r}) \xrightarrow{\Lambda} \mathbf{F}'(t',\mathbf{r}') \qquad (10.1)$$

En notación matemática rigurosa, a igualdade de dous campos significa que están definidos no mesmo conxunto e que en cada punto deste conxunto toman o mesmo valor. Polo tanto se **F** está definido nun conxunto (volumen) V e **G**$'$ está definido no conxunto transformado V'

$$V' = \left\{ (t',\mathbf{r}') \in I\!R^4 \left| \begin{array}{c} (t',\mathbf{r}') = \Lambda(t,\mathbf{r}) \\ (t,\mathbf{r}) \in V \end{array} \right. \right\}$$

con Λ definido por (9.13), non tería sentido escribir $\mathbf{F} = \mathbf{G}'$.

A forma correcta sería

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}' \circ \Lambda \qquad (10.2)$$

$$\mathbf{F} \circ \Lambda^{-1} = \mathbf{G}'$$

Esto é o que se fai cando máis adiante se escribe $\rho \circ \Lambda^{-1} |D\Lambda^{-1}| = \rho'$. ρ está definido en V e ρ' na imaxen de V, que é V'. Así, $\rho \circ \Lambda^{-1}$ está definido en V', téndose que

$$\rho \circ \Lambda^{-1}(t', \mathbf{r}') = \rho\,[\Lambda^{-1}(t', \mathbf{r}')] = \rho\,(t, \mathbf{r})$$

Pero podemos alixeirar a notación establecendo como convenio de que unha igualdade (ou desigualdade) entre campos definidos en sistemas de referencia distintos se debe interpretar como en (10.2). Dacordo con esto, a relación (10.3) significa que en todo (t, $\mathbf{r}$) onde (en Σ) estea definido ρ,

$$\frac{\rho(t,\mathbf{r})}{\gamma_{v(t,\mathbf{r})}} = \rho'(t',\mathbf{r}')$$

sendo (t', $\mathbf{r}'$) o punto do espacio-tempo correspondente en Σ'.

[1] As ecuaciós de Maxwell son válidas en calquera sistema de referencia, porque as magnitudes relacionadas nelas (campos, fontes e coordenadas espaciales e tamporales) cambian ó mesmo tempo ó cambiar o sistema de referencia, é dicir, son covariantes, pero non están expresadas en forma tensorial. Por eso á formulación tensorial que estamos estudiando se lle sole chamar *manifestamente covariante*.

CADRIVECTOR DENSIDADE DE CORRENTE

É un feito experimental que a carga se conserva. Se aplicamos este principio a un determinado volumen temos que concluir que a densidade de carga se transforma como a inversa do volumen. Velaquí a demostración:

Supoñamos un volumen V que contén unha carga Q distribuida según unha densidade ρ con respecto a un sistema de referencia Σ. En V a carga móvese dacordo cun campo de velocidades $\mathbf{v}$.

Dado no instante t un punto $\mathbf{r} \in V$, supoñamos unha transformación de Lorentz Λ con $\boldsymbol{\beta}$ tal que

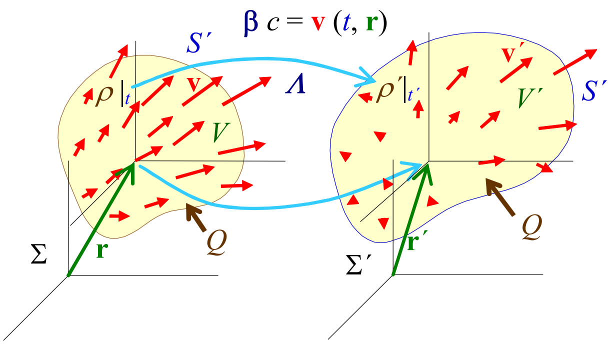

Fig. 10.1

$$\mathbf{v}\,(t, \mathbf{r}) = \boldsymbol{\beta} c$$

Con esta transformación, no sistema de Σ' o punto $(t', \mathbf{r}')$ estará inmóvil (fig. 1), e polo tanto o valor $\rho'(t', \mathbf{r}')$ da densidade de carga neste punto será unha *magnitude propia*, invariante.

Sea $V' = \Lambda(V)$. Pola conservación da carga,

$$Q = \int_V \rho\, dv = \int_{V'} \rho'\, dv'$$

A carga en V tamén se póde calcular polo cambio de variable:

$$\int_V \rho dv = \int_{V'} \rho \circ \Lambda^{-1} \left| D\Lambda^{-1} \right| dv'$$

Como V' é arbitrario,

$$\rho \circ \Lambda^{-1} |D\Lambda^{-1}| = \rho'.$$

O xacobiano $|D\Lambda^{-1}|$ en tres dimensiós é o factor de escala da transformación do volumen. Podemos supoñer un volumen $(\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{w}_3$ determinado por tres vectores, facendo $\mathbf{w}_1$ na dirección de $\boldsymbol{\beta}$ e os outros dous perpendiculares. Con esta elección, $\mathbf{w}_1' = \gamma_v\, \mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2' = \mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3' = \mathbf{w}_3$. Polo tanto, $(\mathbf{w}_1' \times \mathbf{w}_2') \cdot \mathbf{w}_3' = \gamma_v\, (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{w}_3$, e

$$|D\Lambda^{-1}| = 1/\gamma_v.$$

Logo,

$$\frac{\rho}{\gamma_v} = \rho' \qquad (10.3)$$

Como ρ' é invariante, tamén debe selo $(1/\gamma_v)\rho$.

O campo de 4-velocidades

$$U^\alpha = (\gamma_v c,\ \gamma_v \mathbf{v})$$

construido a partir das tres compoñentes do campo de velocidades $\mathbf{v}$ e unha compoñente $U^0 = \gamma_v c$ coincide en cada punto $(t, \mathbf{r})$ co cadrivector velocidade (9.26), facendo $\mathbf{u} = \mathbf{v}\,(t, \mathbf{r})$. Polo tanto é un cadrivector. Se o multiplicamos polo escalar (10.3) obtemos outro cadrivector

$$\mathcal{J}^{\alpha} = \frac{\rho}{\gamma_v} U^{\alpha} = (c\rho, \mathbf{J}) \tag{10.4}$$

As compoñentes *espaciales* son as da densidade de corrente $\mathbf{J} = \rho\,\mathbf{v}$. Logo $\mathcal{J}^{\alpha}$ é unha extensión covariante do vector densidade de corrente, que se chama por esto *cadrivector densidade de corrente*:

Usando $\mathcal{J}^{\alpha}$, a *ecuación de continuidade*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial(\rho c)}{\partial(ct)} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0$$

admite a expresión covariante

$$\frac{\partial \mathcal{J}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \tag{10.5}$$

CADRIVECTOR POTENCIAL

A forma tetradimensional do operador d'Alembertiano $\Box$:

$$\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -g^{00}\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial}{\partial x^0} - g^{11}\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^1} - g^{22}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^2} - g^{33}\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x^3} =$$

$$= -g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = -\frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\alpha}}$$

evidencia que é un invariante de Lorentz, por ser un producto escalar. Esto é outra forma de expresar a invarianza da ecuación de ondas, punto de partida prá teoría da relatividade.

Coa condición de Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

as ecuaciós que relacionan os potenciales coas fontes son dúas ecuaciós de ondas

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\ t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\mu_0 c^2 \rho$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial\ t^2} = -\mu_0\mathbf{J}$$

Se definimos

$$\mathcal{A}^{\alpha} = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}\right) \tag{10.6}$$

mediante as catro cantidades:

$$\mathcal{A}^0 = \frac{\phi}{c} \quad , \quad \mathcal{A}^1 = A_x \quad , \quad \mathcal{A}^2 = A_y \quad , \quad \mathcal{A}^3 = A_z$$

as ecuaciós pra ϕ e **A** reúnense nunha:

$$\Box\mathcal{A}^{\alpha} = -\mu_0\mathcal{J}^{\alpha} \tag{10.7}$$

con

$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha}$$

Por ser $\Box$ un invariante, $\mathcal{A}^\alpha$ debe ser un cadrivector [2], que chamamos c*adrivector potencial*. A propia condición de Lorentz queda expresada pola ecuación

$$\frac{\partial \mathcal{A}^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{10.8}$$

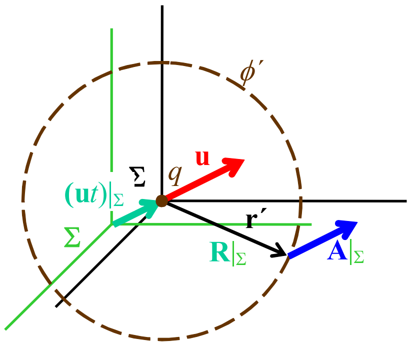

Fig. 10.2

Exemplo 10.1: potenciales de Liénard-Wiechert

Supoñamos unha carga puntual q movéndose con velocidade $\mathbf{u}$ uniforme con respecto a un sistema de referencia Σ. No seu sistema propio Σ´ o potencial escalar é o potencial electrostático, e o potencial vectorial é cero (fig. 2)[3]:

$$\left.\begin{aligned} \phi' &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'} \\ \mathbf{A}' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Os potenciales en Σ pódense calcular transformando o cadrivector potencial (10.6):

$$\frac{\phi}{c} = \gamma\left(\frac{\phi'}{c} + \beta A'_\parallel\right) \quad \Rightarrow \quad \phi = \gamma\,\phi'$$

O resultado debe presentarse en función das coordenadas de Σ. Transformando $\mathbf{r}'$,

$$\left.\begin{aligned} r'_\parallel &= \gamma\left(r_\parallel - \beta ct\right) \\ \mathbf{r}'_\perp &= \mathbf{r}_\perp \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{r'} = \frac{1}{\sqrt{\left(r_\parallel - \beta ct\right)^2 + \left(1-\beta^2\right)\mathbf{r}_\perp^2}}$$

En finción da variable

$$s = [R] - \frac{[\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}]}{c},$$

rescribindo as magnitudes en *tempo remoto* como no exemplo (9.3), e tendo en conta os cálculos de (7.8), teríamos

$$\left(r_\parallel - \beta ct\right)^2 + \left(1-\beta^2\right)r_\perp^2 = R_\parallel^2 + \left(1-\beta^2\right)R_\perp^2 =$$

$$= \left(1-\beta^2\right)\left(R_\parallel^2 + R_\perp^2\right) + \beta^2 R_\parallel^2 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)R^2 + \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}}{c}\right)^2 = s^2$$

De onde

---

[2] Salvo un término constante, físicamente irrelevante e que tomamos igual a cero, e un término cadrivectorial suxeito a condición de Lorentz (10.5).

[3] Na figura preséntanse mezcladas magnitudes de Σ e de Σ´, indicando cales corresponden a Σ. En realidade corresponderían a dúas figuras, como na fig.1. En Σ a superficie equipotencial non sería esférica, e en Σ´, $\mathbf{A}' = 0$.

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{s} \qquad \textit{(7.5)}$$

O potencial vectorial obtense da mesma maneira:

$$\left.\begin{array}{c} A'_{\parallel} = \gamma\left(A_{\parallel} - \beta\dfrac{\phi}{c}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{\parallel} = \dfrac{u}{c^2}\phi \\ \mathbf{A}'_{\perp} = \mathbf{A}_{\perp} = 0 \end{array}\right\}$$

Logo, en función de coordenadas de Σ,

$$\mathbf{A} = \phi\frac{\mathbf{u}}{c^2} \qquad \textit{(7.6b)}$$

TENSOR ELECTROMAGNÉTICO

O rotacional en catro dimensiós do cadrivector potencial en forma covariante $A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta = (\phi/c, -\mathbf{A})$, é un tensor antisimétrico de segundo orden, con compoñentes covariantes

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial x^\beta} \qquad (10.9)$$

Explícitamente:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (10.10)$$

As compoñentes contravariantes resultan multiplicando dúas veces polo tensor métrico:

$$F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu}F_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (10.11)$$

ECUACIÓS DE MAXWELL EN FORMA TENSORIAL

Da definición de $F_{\alpha\beta}$ resulta inmediatamente a identidade

$$\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} = 0 \qquad (10.12)$$

Anque as posibles variaciós dos índices (0, 1, 2, 3) tomados de tres en tres son 24, pola antisimetría do tensor electromagnético solo quedan $\binom{4}{3} = 4$ identidades distintas non triviales. Substituíndo nestas os valores dos $F_{\alpha\beta}$ obtéñense as ecuaciós de Maxwell homoxéneas

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Existe outra relación prás compoñentes contravariantes $F^{\alpha\beta}$:

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{a}} = \frac{\partial}{\partial x^{a}}\left[g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \mathcal{A}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x^{a}}\left(\frac{\partial \mathcal{A}^{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{A}^{\alpha}}{\partial x_{\beta}}\right) = \frac{\partial^{2} \mathcal{A}^{\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial x_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \mathcal{A}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$$

O último término é cero, por (10.8). E, por (10.7),

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \mu_0 \mathcal{J}^{\beta} \tag{10.13}$$

Substituíndo nelas os valores das compoñentes $F^{\alpha\beta}$ obtéñense catro ecuaciós escalares que equivalen a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

TRANSFORMACIÓS DOS CAMPOS

Xa que as compoñentes $\boldsymbol{F}^{\alpha\beta}$, que supoñemos referidas a un sistema Σ, forman un tensor de segundo orden, podémolas calcular noutro sistema Σ′ facendo o cambio de base correspondente á transformación de Lorentz Λ de Σ Σ′:

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\lambda} \Lambda^{\beta}_{\mu} F^{\lambda\mu}$$

O cálculo é sistemático. Por exemplo tomando $\boldsymbol{\beta}$ na dirección dun eixe, podemos calcular independentemente as compoñentes $\mathbf{E}_{\|}$ e $\mathbf{B}_{\|}$ paralelas a $\boldsymbol{\beta}$ e as perpendiculares $\mathbf{E}_{\perp}$ e $\mathbf{B}_{\perp}$, chegando ós resultados:

$$\mathbf{E}'_{\|} = \mathbf{E}_{\|} \quad ; \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + c\,\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \tag{10.14}$$

$$\mathbf{B}'_{\|} = \mathbf{B}_{\|} \quad ; \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}\right) \tag{10.15}$$

Existen dous invariantes, chamados invariantes dos campos. Facendo $2I_1 = F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, desaparecen os índices e o resultado é un escalar:

$$I_1 = c^2B^2 - E^2 \tag{10.16}$$

Según o seu valor danse tres posibles situaciós:

$I_1 < 0$: Neste caso podería existir un sistema de referencia no que o campo é puramente eléctrico.

$I_1 > 0$: Nalgún sistema de referencia o campo podería ser puramente magnético[4].

$I_1 = 0$: Trátase dun campo electromagnético propagándose no espacio libre, sin fontes.

O segundo invariante obtense fácilmente pola relación $I_2 = \mathbf{B}_{\|}\cdot\mathbf{E}_{\|} + \mathbf{B}_{\perp}\cdot\mathbf{E}_{\perp}$:

$$I_2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{10.17}$$

Exemplo 10.2: campos dunha carga en movemento uniforme

Supoñamos a carga da fig. 2 movéndose con velocidade constante $\mathbf{u}$. No seu sistema propio $\mathbf{B}' = 0$, e $\mathbf{E}'$ será o campo electrostático

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}'_{\|}+\mathbf{r}'_{\perp}}{r'^3}$$

Por (10.14), con $\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{u}/c$ e transformando as coordenadas,

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_{\|} &= \mathbf{E}'_{\|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\left(\mathbf{r}_{\|}-\mathbf{u}\,t\right)}{\left[\gamma^2\left(r_{\|}-ut\right)^2+\mathbf{r}_{\perp}^2\right]^{3/2}}\\ \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{E}'_{\perp}-c\boldsymbol{\beta}\times\underbrace{\mathbf{B}'}_{0}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\,\mathbf{r}_{\perp}}{\left[\gamma^2\left(r_{\|}-ut\right)^2+\mathbf{r}_{\perp}^2\right]^{3/2}}\end{aligned}\right\}$$

Agora, usando

$$\left(r_{\|}-ut\right)^2+\frac{1}{\gamma^2}r_{\perp}^2 = \left(r_{\|}-ut\right)^2+r_{\perp}^2+\beta^2 r_{\perp}^2 = R^2-\frac{u^2R^2}{c^2}sen^2\theta$$

podemos escribir o campo na forma conocida

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{\gamma^2 s^3} \tag{7.8}$$

Pola mesma transformación calculamos $\mathbf{B}$:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B}_{\|} &= \mathbf{B}'_{\|} = 0\\ \mathbf{B}_{\perp} &= \mathbf{B}'_{\perp}+\frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}'\end{aligned}\right\}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathbf{u}\times\mathbf{E} \tag{7.10}$$

TRNASFORMACIÓS DAS ONDAS PLANAS

No caso dunha onda plana $I_2 = 0$ equivale á perpendicularidade de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ e $I_1 = 0$ dá a relación constante entre os módulos dos campos. Ó ser os dous invariantes, unha onda plana transfórmase noutra onda plana ó cambiar de sistema de referencia.

A transformación dos campos faise como sigue. De (10.10):

---

[4] A condición necesaria e suficiente pra ter $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{B} = 0$ ou $\mathbf{E} = 0$ $\mathbf{B} \neq 0$, nalgún sistema de referencia é que $I_1 \neq 0$ e $I_2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$.

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma\left[\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}\right)\right] = \gamma\left[\left(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}_{\parallel}\right)\right]$$

Agora facendo $\mathbf{E}_{\parallel} = \hat{\boldsymbol{\beta}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{E}\right)$ resolvemos o doble producto vectorial. Pra **B** o proceso é idéntico. A transformación queda

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma\left[\left(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)\mathbf{E}_{\perp} + \left(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}\right)\hat{\mathbf{n}}_{\perp}\right]\\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma\left[\left(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)\mathbf{B}_{\perp} + \left(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B}\right)\hat{\mathbf{n}}_{\perp}\right]\end{aligned} \tag{10.18}$$

Ondas planas monocromáticas

Supoñamos unha onda plana con campos

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}[\mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}]$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{Re}[\mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}]$$

Nunha onda plana $\mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = 0$. Logo, polo invariante I_1 de (10.11), se $\mathbf{E} = 0$ nun sistema Σ, tamén será cero en calquera outro sistema Σ'. Polo que a fase $\varphi = \omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ é un invariante.

Se definimos $k^{\alpha} = (\omega/c, \mathbf{k})$, compróbase que $\varphi = g_{\alpha\beta}k^{\alpha}x^{\beta}$. Polo tanto k^{α} é un cadrivector, que chamaremos *cadrivector de onda*. Como $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{n}}\dfrac{\omega}{c}$ a transformación de k^{α} xenera as ecuaciós,

$$\left.\begin{aligned}\omega &= \gamma\omega'\left(1+\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}'_{\parallel}\right)\\ \omega\,\hat{\mathbf{n}}_{\parallel} &= \gamma\omega'\left(\hat{\mathbf{n}}'_{\parallel}+\boldsymbol{\beta}\right)\\ \omega\,\hat{\mathbf{n}}_{\perp} &= \omega'\hat{\mathbf{n}}'_{\perp}\end{aligned}\right\}$$

Multiplicando a segunda por β e restandoa da primeira deducimos a transformación de frecuencia (*efecto Doppler* relativista):

$$\omega = \omega'\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}} \tag{10.19}$$

A diferencia do Doppler clásico, o efecto Doppler relativista solo depende da velocidade relativa da fonte con respecto ó observador, como se póde prever polos postulados da relatividade.

Distínguense dous casos particulares

Efecto Doppler lonxitudinal: ($\boldsymbol{\beta}\|\mathbf{k}$, coa onda propagándose cara ó observador). Resulta

$$\omega = \omega'\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \underset{(\beta<<1)}{\cong} \omega'(1-\beta)$$

No caso de baixas velocidades redúcese ó Doppler clásico.

Efecto Doppler transversal: $\boldsymbol{\beta}\perp\mathbf{k} \Rightarrow$

$$\omega = \omega'\sqrt{1-\beta^2} \underset{(\beta<<1)}{\cong} \omega'\left(1-\frac{1}{2}\beta^2\right)$$