MECÁNICA RELATIVISTA

CADRIVECTOR DENSIDADE DE FORZA

As compoñentes covariantes do cadrivector corrente son

$$J_\alpha = g_{\alpha\beta} J^\beta = (\rho c, -\mathbf{J})$$

O cadrivector resultante de multiplicar o tensor electromagnético por J_α contén as tres compoñentes da densidade de forza de Lorentz:

$$F^{\alpha\beta} J_\beta = f^\alpha, \ \alpha = 1, 2, 3.$$

Por exemplo, $f^1 = F^{1\beta} J_\beta = \frac{1}{c} E_x \rho c + B_z J_y - B_y J_z = (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})_x = f_x$.

A outra compoñente é proporcional ó traballo w realizado polo campo por unidade de tempo e volumen (potencia por unidade de volumen) [1]:

$$F^{0k} J_k = \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{w}{c}$$

Con estas compoñentes construimos o *cadrivector densidade de forza* :

$$f^\alpha = \left(\frac{w}{c}, \mathbf{f} \right) \tag{12.1}$$

FORZA DE MINKOWSKI

A integral deste cadrivector nun volumen V tridimensional non é un cadrivector, debido a que o volumen non é invariante.

En cambio un 4–volumen (volumen tetradimensional) $V^{(4)}$, dado que a transformación de Lorentz é ortogonal, (logo o xacobiano do cambio de variable de $V'^{(4)}$ a $V^{(4)}$ será 1):

$$|D\Lambda| = \begin{vmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1$$

é invariante, de onde [2]:

$$\Lambda \left(\int_{V^{(4)}} f^\alpha dv \right) = \int_{\Lambda(V^{(4)})} f'^\alpha dv' = \int_{V^{(4)}} \Lambda \circ f'^\alpha |D\Lambda| dv = \int_{V^{(4)}} \Lambda \circ f'^\alpha dv$$

tén carácter cadrivectorial.

---

[1] Os índices latinos refírense a coordenadas *espaciales* e toman os valores 1, 2, 3 ou x, y, z.

[2] A primeira igualdade é a traducción matemática do sentido físico da transformación. A continuación aplícase o teorema de cambio de variable. A notación $\Lambda \circ f'^\alpha$ representa $f'^\alpha(t', \mathbf{r}')$.

Supoñamos a forza $F^{\alpha} = \int_V f^{\alpha} dv$ actuando sobre un volumen tridimensional V (o superíndice non significa que sea un cadrivector). A variación do *momento* [3] Δp^{α}, en cambio:

$$\Delta p^{\alpha} = \int_{\Delta t} F^{\alpha} dt = \int_{\Delta t} \left(\int_V f^{\alpha} dv \right) dt = \int_{V^{(4)}} f^{\alpha} dv^{(4)} ,$$

si será cadrivectorial.

A derivada con respecto ó tempo propio τ, invariante, é o cadrivector

$$K^{\alpha} = \frac{dp^{\alpha}}{d\tau} = \gamma \frac{dp^{\alpha}}{dt} = \int_V \gamma f^{\alpha} dv$$

chamado *forza de Minkowski*:

$$K^{\alpha} = \left(\gamma \frac{P}{c}, \gamma \mathbf{F} \right) \tag{12.2}$$

cunha compoñente proporcional á potencia P xenerada polo campo e as tres compoñentes da forza de Lorentz $\mathbf{F}$, multiplicadas por γ.

A forza sobre unha partícula calcúlase supoñendo que no volumen V que contén a carga da partícula os campos (externos) son constantes:

$$\int_V \gamma_u (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dv = \int_V \gamma_u \rho (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) dv = \gamma_u (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \int_V \rho\, dv = \gamma_u q (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$\int_V \gamma_u \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = \int_V \gamma_u \frac{1}{c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} dv = \gamma_u q \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}}{c}$$

A forza de Minkowski que actúa sobre a partícula é logo

$$K^{a} = \left(\gamma_u q \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}}{c}, \gamma_u q (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right) = \left(\gamma_u q \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}}{c}, \gamma_u \mathbf{F} \right) \tag{12.3}$$

TENSOR ENERXÍA–MOMENTO

Os teoremas de conservación da enerxía e do momento electromagnéticos pódense reunir nunha sola expresión covariante. O teorema de Poynting en forma diferencial (2.8) onde $w = \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}$ é a potencia disipada por unidade de volumen, queda

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -w$$

e, en catro dimensiós:

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial x^0} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial S_x}{\partial x^1} + \frac{\partial S_y}{\partial x^2} + \frac{\partial S_z}{\partial x^3} \right) = -\frac{w}{c} = -f^0 \tag{12.4}$$

Tamén o teorema de conservación do momento (2.17)

[3] Adiantamos o concepto de momento relativista, que se desenrolará máis tarde (12.10).

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}+\varepsilon_0\int_V \mathbf{E}\times\mathbf{B}\,dv\right)=\oint_S \mathbf{T}^M\,\hat{\mathbf{n}}\,da=\int_V \nabla\cdot\mathbf{T}^M\,dv\,,$$

($\mathbf{T}^M$ é o tensor de Maxwell), identificando a derivada do momento coa forza aplicada e posto na forma diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)}_{\mathbf{g}}-\nabla\cdot\mathbf{T}^m=-\mathbf{f}$$

admite unha descomposición en coordenadas rectangulares. Se x^i é un dos eixes cartesianos no espacio tridimensional,

$$\left(\nabla\cdot\mathbf{T}^M\right)_i=\hat{\mathbf{e}}_i\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{T}^M\right)=\nabla\cdot\left(\mathbf{T}^{M*}\hat{\mathbf{e}}_i\right)=\nabla\cdot\left[\begin{pmatrix}T_{xx} & T_{yx} & T_{zx}\\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy}\\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz}\end{pmatrix}\hat{\mathbf{e}}_i\right]=$$
$$=\nabla\cdot\begin{pmatrix}T_{ix}\\ T_{iy}\\ T_{ix}\end{pmatrix}=\frac{\partial T_{ix}}{\partial x}+\frac{\partial T_{iy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{ix}}{\partial z}=\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^j} \tag{12.5}$$

variando o índice latino i entre 1 e 3. E en canto o término do momento $\mathbf{g}$,

$$\left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t}\right)_i=\frac{\partial\left(cg_i\right)}{\partial x^0} \tag{12.6}$$

Todo esto permítenos construir o seguinte sistema de ecuaciós

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x^0}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\\ \vdots\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c}u_{em} & \dfrac{1}{c}\mathbf{S}\\ \hline c\mathbf{g} & -\mathbf{T}^M\end{array}\right)=-\begin{pmatrix}f^0\\ \vdots\\ f^\alpha\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{12.7}$$

O tensor $T^{\alpha\beta}$ que representamos por bloques é o *tensor de enerxía–momento electromagnético*. Explícitamente

$$T^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}u_{em} & \frac{1}{c}S_x & \frac{1}{c}S_y & \frac{1}{c}S_z\\ cg_x & -T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz}\\ cg_y & -T_{yx} & -T_{yy} & -T_{yz}\\ cg_z & -T_{zx} & -T_{zy} & -T_{zz}\end{pmatrix} \tag{12.8}$$

Compróbase fácilmente que no espacio libre é un tensor simétrico.

A conservación da enerxía-momento electromagnéticos queda así condensada na relación

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}=-f^\alpha \tag{12.9}$$

O carácter tensorial de $T^{\alpha\beta}$ pódese supoñer polo cumplimento da ecuación anterior. Un procedemento máis directo é comprobar que

$$T^\alpha_\beta=\frac{1}{\mu_0}\left[F^{\alpha\lambda}F_{\lambda\beta}-\frac{1}{4}\delta^\beta_\alpha\left(F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\right)\right]$$

CADRIVECTOR MOMENTO

En mecánica non relativista, a *enerxía* e o *momento* son magnitudes aditivas e conservativas. Por *aditiva* enténdese que a magnitude total dun sistema é a suma das correspondentes ás partes, sempre que non haxa términos de interacción. Por *conservativa*, que se non hai interacción co exterior, o valor do total non depende do tempo.

Na extensión relativista destes conceptos trátase de manter estas dúas propiedades, e que ademáis, no límite non relativista (velocidade moito menor ca c), a enerxía e o momento relativistas coincidan cos non relativistas.

O *momento* $\mathbf{p}$ dunha paratículas enténdese como unha magnitude vectorial que depende da velocidade $\mathbf{u}$ da partícula. Pola isotropía do espacio, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{u}$ deben ser paralelos, e a relación entre eles non debe depender da dirección. Logo, admitindo unha posible dependencia con respecto ó módulo da velocidade, definimos

$$\mathbf{p} = m(u)\,\mathbf{u} \tag{12.10}$$

A enerxía $\mathcal{E}$, igualmente, poderá depender de u, pero non da dirección.

Sea m_0 a *masa propia* dunha partícula, é dicir, a masa (invariante) que tería pra un observador con respecto ó que a partícula estuvese en repouso. Construimos o *cadrivector momento* multiplicando m_0 polo cadrivector velocidade:

$$G^\alpha = m_0 U^\alpha = \left(\gamma_u m_0 c, \gamma_u m_0 \mathbf{u}\right) \tag{12.11}$$

A derivada de G^α con respecto ó tempo propio τ tamén será un cadrivector:

$$\frac{dG^\alpha}{d\tau} = m_0 a^\alpha$$

A xeneralización "natural" da segunda lei de Newton sería identificar esta derivada coa forza de Minkowki K^α:

$$\frac{dG^\alpha}{d\tau} = K^\alpha\,, \tag{12.12}$$

xa que no límite clásico esto coincide coa dita lei. En efecto, por (9.30) e (12.12):

$$\frac{dG^0}{dt} = \frac{1}{\gamma_u}\frac{dG^0}{d\tau} = m_0\frac{a^0}{\gamma_u} = m_0\gamma_u^3\frac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c} = \frac{\gamma_u^3}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_0 u^2\right)$$
$$\frac{dG^0}{dt} = \gamma_u q\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{E}}{c}$$

Esto, cando $\gamma_u = 1$, é o teorema clásico de conservación da enerxía

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_0 u^2\right) = q\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{E}$$

En canto á parte espacial,

$$\frac{m_0}{\gamma_u}\left(\gamma_u^2\dot{\mathbf{u}} + \gamma_u^4\mathbf{u}\frac{\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}}{c^2}\right) = \mathbf{F}$$

no límite non relativista equivale á 2ª lei de Newton:

$$m_0\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}$$

Ó coincidiren pra $\gamma = 1$ e transformárense da mesma maneira os dous membros da igualdade, queda probado (12.12). Expresado en función do tempo t, dado que $d\tau/dt = 1/\gamma_u$, obtense a ecuación relativista da dinámica dunha partícula:

$$\frac{dG^a}{dt} = \frac{1}{\gamma_u} K^a \tag{12.13}$$

Esta ecuación descomponse en dúas:

$$\begin{aligned} \frac{d(\gamma_u m_0 c)}{dt} &= q \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}}{c} \\ \frac{d(\gamma_u m_0 \mathbf{u})}{dt} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \tag{12.14}$$

Destas:

$$\frac{d(\gamma_u \mathbf{u})}{dt} = \mathbf{u}\frac{d\gamma_u}{dt} + \gamma_u \dot{\mathbf{u}} = \frac{q}{m_0 c^2}\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) + \gamma_u \dot{\mathbf{u}} = \frac{q}{m_0}(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Facendo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\|} + \mathbf{E}_{\perp}$ podemos poñer

$$\gamma_u \dot{\mathbf{u}} = \frac{q}{m_0}\left(-\frac{1}{c^2}\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{E}_{\|} + \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}\right) = \frac{q}{m_0}\left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\mathbf{E}_{\|} + \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}\right]$$

e obter as compoñentes paralela e perpendicular a **u** da aceleración:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{\|} &= \frac{q}{m_0 \gamma_u^3}\mathbf{E}_{\|} \\ \dot{\mathbf{u}}_{\perp} &= \frac{q}{m_0 \gamma_u}(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \tag{12.15}$$

A *inercia* da partícula é distinta según que a forza sea paralela ou perpendicular a **u**. As magnitudes que representan esta inercia chámanse *masa lonxitudinal*, $m_{\|}$, e *masa transversal*, $m_{\perp}$:

$$m_{\| } = m_0 \gamma_u^3$$

$$m_{\perp} = m_0 \gamma_u$$

O feito de que $m_{\|} \to \infty$ cando $u \to c$ fai que ningunha partícula con masa $m_0 \neq 0$ poida ser acelerada hasta chegar á velocidade da luz.

MASA RELATIVISTA

Pra manter a definición (12.10) temos que admitir que a masa varía da forma

$$m = \gamma_u m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{12.16}$$

Esta masa, que coincide coa masa transversal definida antes, chámase *masa relativista*. A baixas velocidades é igual á masa clásica m_0.

A primeira ecuación de (12.14), sabendo que $q\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{E}$ é o traballo por unidade de tempo do campo, debe ser a variación con respecto ó tempo da enerxía $\mathcal{E}$ da partícula:

$$\frac{d(\gamma_u m_0 c^2)}{dt} = \frac{d(mc^2)}{dt} = q\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \tag{12.17}$$

Logo $\mathcal{E} = mc^2 + C$, sendo C unha constante. É razonable, e concorda coa experiencia, facer $C = 0$. Con eso temos a *relación de Einstein*

$$\mathcal{E} = mc^2 \tag{12.18}$$

entre a masa dunha partícula e a súa enerxía.

O cadrivector momento (12.11) queda $G^\alpha = (mc, m\mathbf{u}) = (mc, \mathbf{p})$. Multiplicando pola constante c e usando (12.16) e (12.18) resulta que $cG^\alpha = (\mathcal{E}, c\mathbf{p})$ é un cadrivector. En consecuencia $\mathcal{E}^2 - p^2c^2$ é invariante, e igual ó valor m_0c^2 que toma cando $\gamma_u = 1$. Logo

$$\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \tag{12.19}$$

sendo $\mathcal{E}_0 = m_0c^2$ a enerxía en repouso e o resto $\mathcal{E}_c = (\gamma - 1)\, m_0c^2$ a enerxía cinética.