

## ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN MEDIOS ILIMITADOS.

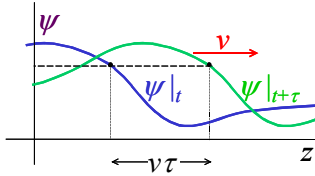


Fig. 3.1

Unha onda é unha perturbación propagándose no espacio, é dicir, un campo que nun certo instante  $t + \tau$  toma un valor que se deriva do valor nun instante  $t$  anterior por medio dun certo operador de propagación  $\mathcal{P}_\tau$

$$\psi|_{t+\tau} = \mathcal{P}_\tau \psi|_t$$

No caso máis simple a propagación consiste nunha traslación espacial a velocidade  $v$  constante nunha dirección fixa  $\hat{\mathbf{v}}$  (fig. 1):

$$\psi(\mathbf{r}, t + s/v) = \psi(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{v}}s, t) \quad (3.1)$$

### ECUACIÓNS DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.

Nas ecuacións de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.18)$$

escribimos o dobre rotacional de  $\mathbf{E}$  usando a identidade vectorial  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Do rotacional de  $\mathbf{B}$  resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Sumando as dúas ecuación, sabendo que as derivadas espacial e temporal conmutan,

$$\left( \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (3.2)^1$$

Podemos obter outra ecuación deste tipo pra  $\mathbf{B}$ . Intervambiando as ecuacións e repetindo os cálculos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{B} &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla \times \left( \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

chegamos a

$$\left( \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J} \quad (3.3)$$

<sup>1</sup>  $\square = \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  é o operador chamado d'Alembertiano.

As ecuacións inhomoxéneas (3.2) e (3.3) son as ecuacións de ondas do campo electromagnético. Os termos á dereita do signo igual son as *fontes* dos campos.

**ECUACIONES DE ONDAS EN MEDIOS MATERIALES HOMOXÉNEOS, LINEALES E ISÓTROPOS.**

Consideremos agora un medio homoxéneo, lineal e isotrópico onde pode existir unha corrente libre de condución  $\sigma \mathbf{E}$  e ademais unha corrente *aplicada*  $\mathbf{J}_a$ .<sup>2</sup> A corrente libre total será  $\mathbf{J}_f = \mathbf{J}_a + \sigma \mathbf{E}$ . As outras *ecuacións constitutivas* do medio serán  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  e  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ . En primeiro lugar

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_f}{\varepsilon} \quad (= \nabla \cdot \mathbf{E})$$

Combinando as formas macroscópica e microscópica do rotacional do campo magnético

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_a + \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \left( \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \mu_0 \mathbf{J} &= \mu (\mathbf{J}_a + \sigma \mathbf{E}) + (\mu \varepsilon - \mu_0 \varepsilon_0) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

de (3.2) resulta inmediatamente

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho_f + \mu \frac{\partial \mathbf{J}_a}{\partial t} \quad (3.4)$$

De igual maneira de (3.3), aplicando a lei de indución de Faraday

$$\mu_0 \nabla \times \mathbf{J} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}_a - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mu \varepsilon - \mu_0 \varepsilon_0) \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

chegamos a

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu \nabla \times \mathbf{J}_a \quad (3.5)$$

**PROPAGACIÓN EN MEDIOS NON DISPERSIVOS.**

As ecuacións (3.2) a (3.5) admiten solucións non nulas anque as fontes sean nulas. Estas solucións representan ondas propagándose fóra das rexións onde se xeneran. O caso máis simple, que estidiaremos an primeiro lugar, é o dun medio h.l.i. sin perdas (o que implica que  $\sigma = 0$ ), que podería ser ben i espacio libre. Nestes caso (3.4) e (3.5) quedan

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  cumpren ecuacións de ondas idénticas e aparentemente independentes. Pero na deducción de cada unha delas interveñen os dous campos. Observemos que dado un campo  $\mathbf{F}$  que cumpre unha ecuación de ondas vectorial podemos establecer, introducindo as constantes que cumpran, unhas ecuacións de Maxwell entre  $\mathbf{F}$  e o seu rotacional:

<sup>2</sup> Véxase a nota sobre fontes aplicadas e inducidas no tema 1.

$$\left. \begin{aligned} \left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{F} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{G}^{def}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{F} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{G} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \quad (3.7)$$

(a constante debe á forza ter dimensións de velocidade) porque

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{G} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2}$$

e  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  por non haber fontes. En consecuencia tamén  $\nabla \times \mathbf{F}$  cumpre a ecuación de ondas. O mesmo poderíamos facer partindo de  $\mathbf{G}$ .

Nas líneas seguintes simplificaremos os cálculos traballando con ecuacións escalares en vez de vectoriais. Dada a definición do laplaciano vectorial  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F})$ ,  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}$  (onde o segundo laplaciano é a diverxencia do gradiente) obtemos unha ecuación prá compoñente  $\psi = \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{E}$  ou  $\psi = \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{B}$  do campo na dirección  $\hat{\mathbf{u}}$ :

$$\nabla^2 \psi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.8)$$

Consideremos unha *onda* do tipo (3.1) que se propaga *sin deformación* (fig. 3.1) con velocidade constante e uniforme  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} v$ , e dicir que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -v \frac{\partial \psi}{\partial s} \Big|_{\hat{\mathbf{v}}} = -v \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \psi$$

Por (3.8),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (-v \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \psi) = v^2 \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \psi) = v^2 \nabla \cdot (\hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \psi) = v^2 \nabla^2 \psi$$

resulta que

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (3.9 a)$$

é a *velocidade de propagación*. O valor desta velocidade no espacio libre representase co símbolo  $c$ :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (3.9 b)$$

A relación entre as velocidades de propagación no espacio libre en nun medio é o *índice de refracción* do medio

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\kappa_e \kappa_m} \quad (3.10)$$

sendo  $\kappa_e$  e  $\kappa_m$  a permitividade eléctrica e a permeabilidade magnética relativas.

Un caso particular de propagación unidireccional son as *ondas planas*, nas que os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  están relacionados xeométricamente de forma particularmente simple. Imos deducir esta relación en condicións máis xenerales.

### Operadores diferenciales transversales

Definida unha dirección fixa  $\hat{\mathbf{v}}$ , calquera campo vectorial  $\mathbf{F}$  admite unha descomposición única nas súas compoñentes paralela e perpendicular (transversal) a esta dirección:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\perp + \hat{\mathbf{v}} F_\parallel = \mathbf{F}_\perp + \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F} \quad (3.11)$$

Por definición, a *diverxencia transversal* de  $\mathbf{F}$  é a diverxencia da compoñente transversal

$$\nabla_\perp \cdot \mathbf{F} \stackrel{def}{=} \nabla \cdot \mathbf{F}_\perp \quad (3.12)$$

Os demais operadores diferenciales tridimensionales tamén se pódenn definir en forma transversal. O rotacional quedaría definido por<sup>3</sup>

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla_\perp \times \mathbf{F} \stackrel{def}{=} \nabla_\perp \cdot (\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{u}}), \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.13)$$

Como conclusións inmediatas,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \nabla_\perp \cdot \mathbf{F} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla (\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}) \\ \nabla \cdot (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{F}) &= -\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla_\perp \times \mathbf{F} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \{ \hat{\mathbf{v}} \cdot (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{F}) \} = -\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla_\perp \times \mathbf{F} \end{aligned}$$

### ONDAS TRANSVERSALES EN MEDIOS NON DISPERSIVOS. ONDAS PLANAS.

Seguimos considerando ondas en ausencia de fontes e propagándose con velocidade constante e uniforme. Na identidade vectorial

$$\nabla \times (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{E}) = \hat{\mathbf{v}} \nabla \cdot \mathbf{E} - (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

onde a diverxencia é cero pola primeira hipótesis, introducimos a hipótesis de propagación sin deformación<sup>4</sup>

$$v^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -v (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{E} = v \nabla \times (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{E})$$

Se ademáis impoñemos a condición  $\nabla_\perp \times \mathbf{E} = 0$  temos tamén que  $\nabla \cdot (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{E}) = v \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Logo, como dous campos que teñen iguais a diverxencia e o rotacional solo pódenn diferir nun término estático (que lóxicamente non é parte da onda) concluímos que

$$\mathbf{B} = \frac{1}{v} \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{E} \quad (3.14a)$$

Cun proceso paralelo e coa hipótesis  $\nabla_\perp \times \mathbf{B} = 0$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}) &= \hat{\mathbf{v}} \nabla \cdot \mathbf{B} - (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ -\nabla \times \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -v (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{B} = v \nabla \times (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}) \\ v \nabla \cdot (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}) &= \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \end{aligned}$$

deducimos unha ecuación simétrica da anterior:

$$\mathbf{E} = -v \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} \quad (3.14b)$$

<sup>3</sup> Un operador diferencial transversal contén solo as derivadas nas direccións perpendiculares a  $\hat{\mathbf{v}}$ .

<sup>4</sup> A operación  $(\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{F}$  é o equivalente vectorial de  $\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \psi$  no sentido de que representa a derivada direccional de  $\mathbf{F}$  na dirección  $\hat{\mathbf{v}}$ .

As condicións  $\nabla_{\perp} \times \mathbf{E} = 0$  e  $\nabla_{\perp} \times \mathbf{B} = 0$  significan que *as restriccións dos campos* a planos perpendiculares á dirección de propagación *son conservativas*. Isto cúmplase no caso particular das *ondas planas*, nas que os campos son uniformes nestes planos, chamados por eso *planos de onda*.

En consecuencia os campos eléctrico e magnético son perpendiculares entre eles e á dirección de propagación (fig. 2).

Se nas relación (3.14) facemos  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , teremos

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu}{\sqrt{\epsilon\mu}} \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{H} = -Z \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{H} \quad \text{con} \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (3.15)$$

$$\mu \mathbf{H} = \sqrt{\epsilon\mu} \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{E}$$

A constante  $Z$  chámase *impedancia de propagación* do medio. No espazo libre toma o valor  $Z_0 \cong 377 \Omega$ .

Sabendo que o campo eléctrico é perpendicular á dirección de propagación, o vector de Poynting da onda é

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{Z} \mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{E}) = \hat{\mathbf{v}} \frac{1}{Z} E^2 \quad (3.16)$$

### Exemplo 3.1

Supoñamos que unha onda plana incidindo normalmente sobre unha superficie  $S$  desde o espazo libre se absorbe nela (fig. 3). A potencia  $P$  transferida por unidade de área  $A$  é a que *perde* o volumen  $V$  da figura, dada pola compoñente normal do vector de Poynting<sup>5</sup>. En función do campo eléctrico:

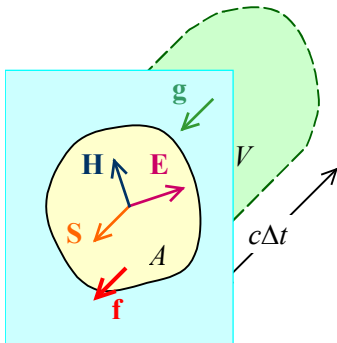


Fig. 3.3

$$\frac{P}{A} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S} = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{1}{Z_0} E^2$$

En canto ás forzas, coa relación (3.13) entre os campos, o tensor de Maxwell queda

$$\mathbf{T} \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}} \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \hat{\mathbf{v}} \epsilon_0 E^2$$

Esta forza por unidade de área é a *presión da radiación*, e representa a variación do momento por unidade de tempo e de área.

Desde outro punto de vista, a superficie absorbe nun tempo  $\Delta t$  o momento electromagnético  $\mathbf{G}$  contido no volumen cilíndrico  $V$  da figura:

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} dv = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} A c \Delta t = \hat{\mathbf{v}} \epsilon_0 E^2 A \Delta t$$

e por unidade de tempo e área tense o momento  $\epsilon_0 E^2$  calculado antes.

### ONDAS MONOCROMÁTICAS

Usando notación complexa a ecuación de ondas escalar (3.7) escríbese:

<sup>5</sup>  $\hat{\mathbf{n}}$  é a normal ó volumen no incide a onda.

$$\nabla^2 \psi + (-i\omega\mu\sigma + \omega^2 \mu\epsilon) \psi = 0$$

Facendo  $k^2 = \omega^2 \mu\epsilon - i\omega\mu\sigma = (\beta - i\alpha)^2$ , obtemos a *ecuación de Helmholtz*

$$(\nabla^2 + k^2) \psi = 0 \quad (3.17)$$

Nun medio sin perdas unha solución da ecuación de Helmholtz en forma de *onda plana* é  $\psi_{fis} = f(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} \mp vt) = \text{Re}[\psi_0 e^{i(\mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)}]$ , facendo  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \hat{\mathbf{n}}$ . En notación complexa,  $\psi = \psi_0 e^{\mp i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ .

O vector  $k$  chámase *vector de propagación*. O seu módulo  $k$  é a *constante de propagación*.

Unha onda plana monocromática é periódica no espacio e no tempo.

Se fixamos o tempo, o período espacial  $\lambda$  na dirección de propagación vén dado por  $k\lambda = 2\pi$ . A lonxitude  $\lambda = 2\pi/k$  chámase *lonxitude de onda*.

Nun punto do espacio fixo, o período temporal  $T$  debe cumprir  $\omega T = 2\pi$ . Polo tanto  $T = 2\pi/\omega$ . A inversa do período temporal chámase frecuencia<sup>6</sup>  $\nu = \omega/2\pi$ .

### POLARIZACIÓN DAS ONDAS

O campo eléctrico dunha onda plana monocromática pódese representar na forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{E}_0 \in \mathcal{C}^3, \quad (3.18)$$

sendo o campo físico

$$\mathbf{E}_{fis} = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\omega t}) = \text{Re} \mathbf{E}_0 \cos(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t) - \text{Im} \mathbf{E}_0 \sin(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t). \quad (3.19)$$

En xeneral, o campo físico nun punto cambia de dirección co tempo, e o vector que o representa describe unha elipse (*polarización elíptica*).

Dise que unha onda plana tén *polarización lineal* se o campo eléctrico tén a mesma dirección en todo punto e momento (a elipse dexenera nun segmento rectilíneo). Isto pasa cando as partes real e imaginaria de  $\mathbf{E}_0$  son paralelas:

$$\text{Re} \mathbf{E}_0 \times \text{Im} \mathbf{E}_0 = 0. \quad (3.20)$$

A *amplitude* do campo eléctrico é  $|\mathbf{E}_0|$ . Lóxicamente  $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}$ . O plano que contén o vector de propagación e o campo eléctrico chámase *plano de polarización*.

A polarización elíptica chámase *a esquerda* ou *a dereitas* según o sentido de rotación do campo que vería un observador mirando na dirección de propagación. Dedúcese facilmente o criterio que determina o sentido da polarización elíptica:

$$\mathbf{k} \cdot [\text{Re} \mathbf{E}_0 \times \text{Im} \mathbf{E}_0] < 0 \Leftrightarrow \text{polarización elíptica a dereitas.}$$

Un caso particular de polarización elíptica é a *polarización circular*, que se tén cando o módulo do campo eléctrico é constante pero cambia de dirección. Pasa isto cando as partes real e imaxinaria de  $\mathbf{E}_0$  son perpendiculares e iguais en módulo:

$$\left. \begin{aligned} |\text{Re} \mathbf{E}_0| &= |\text{Im} \mathbf{E}_0| \\ (\text{Re} \mathbf{E}_0) \cdot (\text{Im} \mathbf{E}_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

### ONDAS PLANAS EN MEDIOS LINEALES DISPERSIVOS

Entendemos por *medio dispersivo* un medio lineal no que as propiedades intensivas que afectan á propagación dependen da frecuencia.

<sup>6</sup> É corrente chamar frecuencia a  $\omega$ , sobre todo entre autores teóricos.

Chámase *relación de dispersión* dun medio lineal á función  $\omega(k)$  ou á inversa  $k(\omega)$ . Por extensión, dada unha propiedade  $\mathcal{P}$  que depende da frecuencia, a función  $\mathcal{P}(\omega)$  é tamén unha relación de dispersión.

Evidentemente nun medio non dispersivo a relación de dispersión é  $k = \omega/v$ .

### Velocidades de fase e de grupo

Unha onda é unha perturbación que se propaga. Esta perturbación transporta enerxía e pódese tamén transportar información. Nun medio dispersivo a velocidade  $v_f = \Delta x_f / \Delta t$  con que se moven

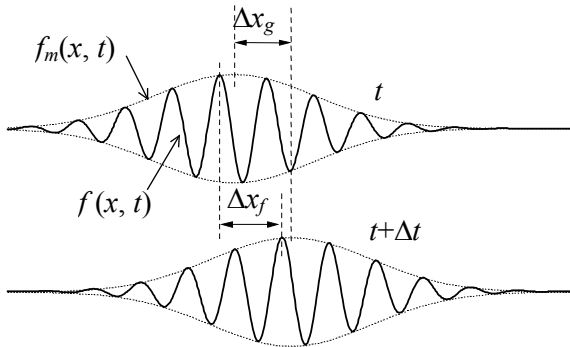


Fig. 3.3

os puntos de fase constante en xeneral non coincide coa velocidade  $v_g = \Delta x_g / \Delta t$  con que se propaga a perturbación (na fig. 3 móstrase, moi esaxerado, o efecto sobre un impulso).

Supoñamos que unha sinal sinusoidal de frecuencia  $\omega_0$  está modulada por unha función  $f_m(x, t)$  con espectro de Fourier limitado e estreito:

$$f_m(0, t) = \int_{-\omega_1}^{\omega_1} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A sinal composta será unha sinusoide de amplitude instantánea  $f(0, t)$ , dada por

$$f(0, t) = f_m(0, t) \operatorname{Re} e^{i\omega_0 t} = \operatorname{Re} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} F(\omega) e^{i(\omega + \omega_0)t} d\omega \quad (3.22)$$

Se a sinal se propaga na dirección  $x$  como unha onda plana nun medio lineal dispersivo, con  $k$  dependente da frecuencia  $\omega$ , podemos expresar a onda como superposición de ondas sinusoidais:

$$f(x, t) = \operatorname{Re} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} F(\omega) e^{i[-kx + (\omega + \omega_0)t]} d\omega$$

Poñamos  $k$  como suma de dous termos:

$$k(\omega_0 + \omega) = k_0 + \left\langle \frac{dk}{d\omega} \right\rangle \omega$$

correspondendo o promedio á derivada nalgún punto do intervalo  $(0, \omega)$ . Así,

$$f(x, t) = \operatorname{Re} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} F(\omega) e^{i \left[ - \left( k_0 + \left\langle \frac{dk}{d\omega} \right\rangle \omega \right) x + (\omega + \omega_0)t \right]} d\omega = \operatorname{Re} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} F(\omega) e^{i \left( - \left\langle \frac{dk}{d\omega} \right\rangle x + t \right) \omega} e^{i(-k_0 x + \omega_0 t)} d\omega$$

Supoñendo o ancho de banda da sinal moduladora moi pequeno, a derivada pódese considerar igual á derivada en  $\omega = 0$ . Con isto, sabendo que a transformada de Fourier de  $f(t - \tau)$  é  $e^{-i\omega\tau} F(\omega)$ , a onda queda

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow 0} f(x, t) = f_m \left( 0, t - \frac{dk}{d\omega} x \right) \operatorname{Re} e^{i(-k_0 x + \omega_0 t)}$$

Obsérvase que a fase da onda aparece desplazada  $-k_0 x$ . Sendo o espectro estreito, está xustifico escribir  $k$  onde temos  $k_0$ :

$$f(x, t) = f_m \left( 0, t - \frac{dk}{d\omega} x \right) \operatorname{Re} e^{i(-kx + \omega t)} \quad (3.23)$$

Definimos a *velocidade de fase* como a velocidade  $v_f$  con que se moven os puntos de fase constante:

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad (3.24)$$

Por outro lado a envolvente propágase como se fose unha onda:

$$f_m(x, t) = f_m \left( 0, t - \frac{dk}{d\omega} x \right)$$

con velocidade  $v_g$ , chamada *velocidade de grupo* ou de *envolvente*:

$$v_g = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} \quad (3.25)$$

### RELACIÓNS DE KRAMERS–KRONIG

As partes real e imaxinaria dos parámetros das ecuacións constitutivas non son independentes. Coas tres hipóteses seguintes

1. *Linealidade*: a resposta é proporcional á causa.
2. *Causalidade*: a resposta é posterior no tempo á causa.
3. *Acción local*: existe unha relación entre o valor da resposta e a causa en cada punto, que non involucra outros puntos,

demostraremos as relacións chamadas *de Kramers–Kronig*.

Como prototipo de parámetro constitutivo tomamos a permitividade dieléctrica  $\varepsilon$ . A relación entre o campo eléctrico e a polarización, en notación complexa, é

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E},$$

sendo

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega) \quad (3.26)$$

O campo  $\mathbf{E}(t)$  pódese expresar como a transformada de Fourier inversa de  $\mathbf{E}(\omega)$ :

$$\mathbf{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Como  $\mathbf{E}(t)$  é real,  $\mathbf{E}(-\omega) = \mathbf{E}^*(\omega)$ . O medio, sometido a este campo, adquire unha polarización  $\mathbf{P}$ , tamén real

$$\mathbf{P}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0] \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Daquí, dado que o campo  $\mathbf{E}$  é arbitrario e real, deducimos que

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega). \quad (3.27)$$

Aplicamos en  $t = 0$  un campo en forma de delta de Dirac  $\mathbf{E}(t) = 2\pi \mathbf{E}_0 \delta(t)$ . A transformada de Fourier será o campo constante  $\mathbf{E}(\omega) = \mathbf{E}_0$ . Pola hipótese de causalidade,

$$\mathbf{P}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0] \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} d\omega = 0 \quad \forall t < 0$$

Agora prolonguemos a función  $[\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0] e^{i\omega' t}$  ó semiplano complexo  $\text{Im}(\omega') \leq 0$  en forma de función analítica. Esta función existe, xa que as relacións de Cauchy-Riemann dunha función  $f$  analítica equivalen, no plano complexo, a  $\nabla^2 \text{Re} f = \nabla^2 \text{Im} f = 0$ , e como consecuencia podemos determinar  $\text{Re} f$  e  $\text{Im} f$  establecendo condicións de contorno (fig. 4)

$$\left. \begin{aligned} f|_{\text{Im}\omega'=0} &= [\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0] e^{i\omega' t} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} f|_{C_2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Dado que a polarización implica movemento de cargas con masa, a grandes frecuencias  $\varepsilon(\omega') \rightarrow \varepsilon_0$ . Por esto podemos, arbitrariamente, establecer a segunda condición de contorno

$$\lim_{|\omega'| \rightarrow \infty} f(\omega') = 0$$

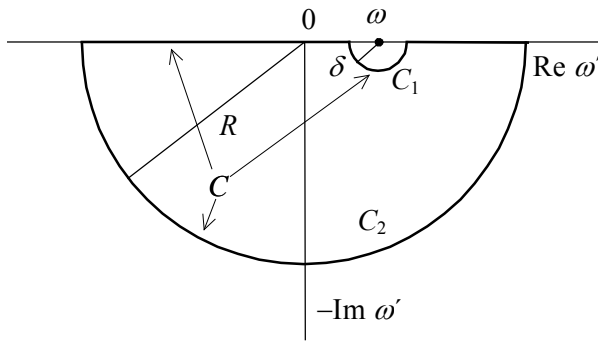


Fig. 3.4

Logo tamén será analítica a función

$$f_1(\omega') = \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega},$$

excepto no punto  $\omega' = \omega$ . Aplicando o teorema integral de Cauchy a  $f_1$  no mesmo dominio, do que excluimos o punto singular por medio dun semicírculo  $C_1$  de radio  $\delta$  (fig. 4), a integral no contorno será cero.

A integral sobre  $C_2$  é do orden de  $[\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0] \pi R / (\omega' - \omega) \cong \pi [\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0] \rightarrow 0$ . Queda:

$$\int_{-\infty}^{\omega-\delta} \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{C_1} \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\omega+\delta}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' = 0$$

Usando (3.27) podemos transformar a integral entre  $-\infty$  e 0 nunha integral entre 0 e  $\infty$ :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^*(\omega') - \varepsilon_0}{-\omega' - \omega} d\omega'$$

Se facemos tender  $\delta$  a cero,

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega-\delta} \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\omega+\delta}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' &\rightarrow \wp \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \int_{C_1} \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' &\rightarrow i\pi [\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0] \end{aligned}$$

Ademáis, por (3.27),

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' = - \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^*(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' + \omega} d\omega'$$

representando  $\wp$  o valor principal de Cauchy da integral. Sumando as dúas integrais entre 0 e  $\infty$  temos a identidade

$$\oint_0^\infty \frac{[\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0](\omega' + \omega) - [\varepsilon^*(\omega') - \varepsilon_0](\omega' - \omega)}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + i\pi[\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0] =$$

$$= 2\oint_0^\infty \frac{\omega[\varepsilon'(\omega') - \varepsilon_0] - i\omega'\varepsilon''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + i\pi[\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0 - i\varepsilon''(\omega)] = 0$$

e separando as partes real e imaxinaria chegamos ás *relacións de Kramers–Kronig* entre  $\varepsilon'$  e  $\varepsilon''$ :

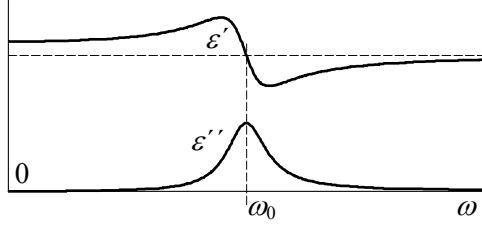


Fig. 3.5

$$\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0 = \frac{2}{\pi} \oint_0^\infty \frac{\omega' \varepsilon''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (3.28)$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \oint_0^\infty \frac{\varepsilon'(\omega') - \varepsilon_0}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Como exemplo, na fig. 5 móstrase esta relación nas proximidades dunha resonancia. Nótese que despois do pico de absorción (máximo de  $\varepsilon''$ ) en  $\omega_0$ ,  $\varepsilon'$  queda por debaixo do valor que tén antes. Isto é xeneral, de maneira que en frecuencias moi altas  $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon_0$ , como xa se dixo.

### PROPAGACIÓN EN CONDUCTORES

Non hai ningunha razón pra que o coeficiente  $k$  da ecuación de Helmholtz teña que ser real. Tódalas funcións implicadas na súa dedución teñen extensión complexa, coas mesmas relacións formales ca con números reais. Se o medio tén conductividade, de feito, non hai solucións con  $k$  real. No seu lugar obtense

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - i\omega \mu \sigma = (\beta - i\alpha)^2, \text{ con}$$

$$k = \beta - i\alpha \quad (3.29)$$

Esto interpreta o feito físico de que ademais da corrente de desplazamento  $\mathbf{J}_d = i\omega\varepsilon' \mathbf{E}$ , que supón un almacenamento de enerxía en forma de campo eléctrico, existe unha corrente de condución  $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$  que produce unha disipación de enerxía electromagnética. En consecuencia o fenómeno non é solo de propagación, senon tamén de atenuación. Introducindo a corrente de perdas na permitividade complexa (3.26), escribimos

$$i\omega\varepsilon = i\omega(\varepsilon' - i\varepsilon'') = i\omega\varepsilon' + \sigma,$$

de onde, nun medio con perdas exclusivamente por correntes de condución:

$$\varepsilon = \varepsilon' - i\frac{\sigma}{\omega} \quad (3.30)$$

Resolvendo a ecuación (3.29),

$$\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{\frac{\sqrt{1+1/Q^2} - 1}{2}}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{\frac{\sqrt{1+1/Q^2} + 1}{2}} \quad (3.31)$$

onde fixemos

$$Q = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} = \frac{|\mathbf{J}_d|}{|\mathbf{J}_f|}.$$

$Q$  chámase *factor de calidade* do medio, e representa a relación entre as correntes de desplazamento e de condución.

**ONDAS PLANAS EN MEDIOS CONDUCTORES**

O campo eléctrico da onda plana que se propaga na dirección  $k$  será

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\beta-i\alpha)\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\beta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{3.32}$$

A constante  $\alpha$  chámase *coeficiente de atenuación*.  $\beta$  tén o sentido que tiña a constante de propagación en medios sin perdas e chámase por eso *constante de propagación*. Obsérvase que se trata dun campo de amplitude decrecente. A distancia  $\delta = 1/\alpha$  na que se atenúa nun factor  $1/e$  chámase *fondura de penetración*.

Se o medio é un bo conductor ( $\omega\epsilon \ll \sigma$ ),

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad \text{e} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{3.33}$$

Non intervén a permitividade, porque a corrente de desplazamento é moito menor ca a de condución ( $Q \ll 1$ ). A ecuación de ondas transfórmase na ecuación de difusión:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 \quad \text{ou} \\ \nabla^2 \mathbf{E} - i\omega\mu\sigma \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

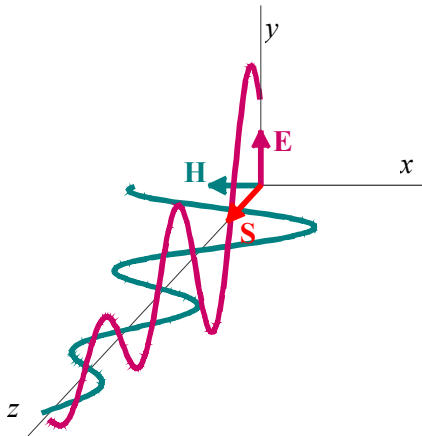


Fig. 3.6

**Relación entre os campos**

Aplicando a relación vectorial

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{F}$$

(sendo  $\mathbf{F}_0$  un vector constante) ós campos eléctrico e magnético dunha onda plana *polarizada linealmente*<sup>7</sup>, da lei de inducción de Farady obtemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{B} \Rightarrow$$

$$\mathbf{B} = \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = \frac{\beta - i\alpha}{\omega} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}, \tag{3.34}$$

A relación inversa obtense da ecuación de  $\nabla \times \mathbf{B}$ , tendo en conta que agora  $k$  tén parte imaxinaria:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = i\omega \left( \frac{k}{\omega} \right)^2 \mathbf{E} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega(\beta + i\alpha)}{\beta^2 + \alpha^2} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} \tag{3.35}$$

Logo os campos eléctrico e magnético siguen sendo transversales e perpendiculares entre eles, coma nos medios sin perdas. Pero, debido a que  $k = \beta - i\alpha$ , o campo magnético retrásase no tempo con respecto ó eléctrico (fig. 6).

<sup>7</sup> Con polarización elíptica as ecuacións (3.24) non implican a perpendicularidade de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ .