

ONDAS PLANAS EN MEDIOS SEMIINFINITOS

Se unha única onda electromagnética atravesa a superficie S de separación entre dous medios, en xeneral os campos $\mathbf{E}|_S$ e $\mathbf{H}|_S$ non satisfán as condicións de fronteira (1.18) en S . É necesario construír unha solución que no medio de incidencia sea superposición da onda *incidente* e outra *reflexada*, e no outro medio sea unha onda *transmitida*.

Neste tema estudiaremos o caso de medios homoxéneos, lineales e isotrópicos sin perdas separados por superficies planas virtualmente infinitas.

COEFICIENTES DE FRESNEL EN INCIDENCIA NORMAL.

Supoñemos que ademais da onda plana incidente desde o medio 1 con campo eléctrico \mathbf{E}^+ existe unha onda reflexada \mathbf{E}^- e unha transmitida ó medio 2, \mathbf{E}' . As direccións siguen o criterio indicado na fig. 1. Se a dirección de propagación da onda incidente é normal á superficie, os seus campos non terán compoñente normal, e as condicións de fronteira que deben cumprir son as referentes ás compoñentes tanxenciais. Por (3.9), os campos magnéticos de cada onda son

$$\mathbf{H}^\varepsilon = \frac{1}{Z_i} \hat{\mathbf{n}}^\varepsilon \times \mathbf{E}^\varepsilon \quad (\hat{\mathbf{n}}^\varepsilon = \pm \hat{\mathbf{n}}, Z_i \in \mathbb{R}) \quad (4.1)$$

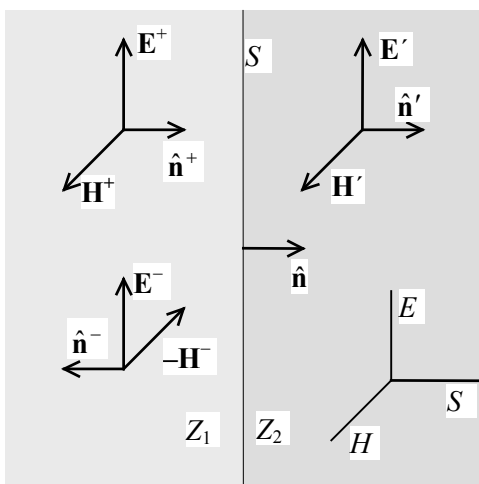


Fig. 4.1

(o superíndice fai referencia á onda, o subíndice ó medio; Z_i é a impedancia característica do medio i).

O campo eléctrico tanxencial debe ser continuo:

$$\mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^- = \mathbf{E}'$$

Imos supoñer que non hai corrente superficial. En consecuencia tamén o campo \mathbf{H} debe ser continuo:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^- &= \frac{1}{Z_1} (\hat{\mathbf{n}}^+ \times \mathbf{E}^+ + \hat{\mathbf{n}}^- \times \mathbf{E}^-) = \\ &= \frac{1}{Z_1} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = \frac{1}{Z_2} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}' \end{aligned}$$

Daquí deducimos que $\frac{1}{Z_1} (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = \frac{1}{Z_2} \mathbf{E}'$.

Operando:

$$\mathbf{E}^- = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \mathbf{E}^+ \quad ; \quad \mathbf{E}' = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \mathbf{E}^+ \quad (4.2)$$

Os coeficientes

$$\begin{aligned} r &= \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \\ t &= \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

chámanse *coeficientes de Fresnel de reflexión* e *de transmisión*, respectivamente, pra incidencia normal.

Se as ondas son monocromáticas, pódese tratar o problema en notación complexa. Neste caso pódense ter impedancias complexas (en medios dispersivos), e lóxicamente tamén coeficientes de Fresnel complexos.

Definimos os *coeficientes de reflexión de potencia* R , e de *transmisión* T , como os cocientes dos módulos dos vectores de Poynting. Os vectores de Poynting son $\mathbf{S}_i^\pm = \pm \frac{1}{Z_i} (E^\pm)^2 \hat{\mathbf{n}}$. Pra valores instantáneos:

$$R = \frac{|S^-|}{|S^+|} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad (4.4 a)$$

$$T = \frac{|S'|}{|S^+|} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

Con ondas monocromáticas en notación complexa esto queda como

$$R = \left| \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right|^2 \quad (4.4 b)$$

$$T = \frac{4 \operatorname{Re}(Z_1 Z_2^*)}{|Z_2 + Z_1|^2}$$

Verifícase que $R + T = 1$, como se debía esperar, xa que consideramos que non hai perdas na superficie.

Ondas estacionarias

Supoñamos que a onda incidente é monocromática, de frecuencia $\omega = kc$. No medio l superpóñense as ondas incidente e reflexada, movéndose en direccións contrarias \mathbf{k} e $-\mathbf{k}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ e^{-ik \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{E}^- e^{ik \cdot \mathbf{r}}$$

Esto é igual ca

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) e^{-ik \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{E}^- (e^{ik \cdot \mathbf{r}} + e^{-ik \cdot \mathbf{r}}) = (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) e^{-ik \cdot \mathbf{r}} + 2\mathbf{E}^- \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

Desta maneira a onda queda expresada como suma dunha onda de amplitude $\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-$ que se propaga na dirección de \mathbf{k} e outra compoñente de amplitude variable $2\mathbf{E}^- \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ que non se propaga e chámase por isto *onda estacionaria*.

Supoñamos que as ondas incidente e reflexada están linealmente polarizadas no mesmo plano ¹, sendo $\mathbf{E}^+ = |\mathbf{E}^+| e^{i\phi^+}$ e $\mathbf{E}^- = |\mathbf{E}^-| e^{i\phi^-}$. Sempre se poderá facer $\phi^\pm = \phi_0 \pm \phi_1$. Así tamén se pode descompoñer \mathbf{E} como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e^{i\phi_0}}{2} (|\mathbf{E}^+| + |\mathbf{E}^-|) [e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi_1)} + e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi_1)}] + \frac{e^{i\phi_0}}{2} (|\mathbf{E}^+| - |\mathbf{E}^-|) [e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi_1)} - e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi_1)}] = \\ &= e^{i\phi_0} (|\mathbf{E}^+| + |\mathbf{E}^-|) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi_1) - ie^{i\phi_0} (|\mathbf{E}^+| - |\mathbf{E}^-|) \operatorname{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi_1) \end{aligned}$$

comprobándose que as amplitudes máxima e mínima son respectivamente $|\mathbf{E}^+| + |\mathbf{E}^-| = |\mathbf{E}^+|(1+|r|)$ e $|\mathbf{E}^+| - |\mathbf{E}^-| = |\mathbf{E}^+|(1-|r|)$.

¹ Nótese que $|\mathbf{E}^\pm| \in \mathbb{R}^3$ é o vector módulo do complexo $\mathbf{E}^\pm \in \mathbb{C}^3$.

Defínese a *relación de ondas estacionarias*, ROE (SWR en inglés) como o cociente entre estas amplitudes máxima e mínima:

$$ROE = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad (4.5)$$

IMPEDANCIA SUPERFICIAL

Cando as correntes se concentran nun intervalo $(\mathbf{r} - \delta \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r} + \delta \hat{\mathbf{n}})$ dun punto regular \mathbf{r} dunha superficie S , con normal $\hat{\mathbf{n}}$ en \mathbf{r} , sendo δ despreziable comparado coas outras dimensións do sistema, defínese a *densidade superficial de corrente* \mathbf{K} como ²

$$\mathbf{K} = \int_{-\delta}^{\delta} \mathbf{J}(\mathbf{r} + s\hat{\mathbf{n}}) ds \quad (4.6)$$

Se o material é lineal, $\mathbf{E} = Z_S \mathbf{K}_f$, e Z_S chámase *impedancia superficial*. Neste caso

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f = \frac{1}{Z_S} \mathbf{E}_1$$

Supoñamos unha lámina plana, de impedancia superficial Z_S , no espazo libre. Usando as expresións xa conocidas dos campos ós dous lados da superficie de separación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_0} (E^+ - E^-) - \frac{1}{Z_S} (E^+ + E^-) &= \frac{1}{Z_0} E' \quad \text{ou} \\ (Z_S - Z_0)E^+ - (Z_S + Z_0)E^- &= Z_S E' \end{aligned}$$

e dado que $E^+ + E^- = E'$:

$$E^- = -\frac{Z_0}{2Z_S + Z_0} E^+ \quad ; \quad E' = \frac{2Z_S}{2Z_S + Z_0} E^+$$

polo que os coeficientes de reflexión e transmisión son

$$r = -\frac{Z_0}{2Z_S + Z_0} \quad ; \quad t = \frac{2Z_S}{2Z_S + Z_0}, \quad (4.7)$$

podendo ser complexos, no caso de ondas monocromáticas tratadas en notación complexa. Os coeficientes de reflexión e transmisión de potencia son

$$R = |r|^2, \quad T = |t|^2,$$

Nótese que aquí $R + T \leq 1$, xa que a corrente na impedancia superficial pódese disipar potencia.

Débese observar que (4.7) solo é válido cando o campo eléctrico sea o mesmo ós dous lados da superficie. No caso dunha lámina de espesor d , esixiríase que $\beta d \ll 1$. En principio este formalismo non sería aplicable á superficie dun conductor.

² Por exemplo, se a superficie está no plano $x = x_0$, $\mathbf{K} = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \mathbf{J} dx$.

MATRIZ DE TRANSMISIÓN

Se polos dous lados dunha superficie de discontinuidade inciden ondas \mathbf{E}_1^+ e \mathbf{E}_2^- , respectivamente, as ondas \mathbf{E}_1^- e \mathbf{E}_2^+ serán superposición da parte reflexada da onda que incide desde o mesmo medio e a transmitida da que incide desde o outro. Supoñamos os campos paralelos. En forma escalar:

$$\begin{aligned} E_1^- &= \frac{1}{Z_1 + Z_2} [(Z_2 - Z_1)E_1^+ + 2Z_1E_2^-] \\ E_2^+ &= \frac{1}{Z_1 + Z_2} [2Z_2E_1^+ + (Z_1 - Z_2)E_2^-] \end{aligned}$$

Utilizando a notación de campos reducidos e_i^ϵ seguinte:

$$\begin{aligned} E_1^+ &= \sqrt{Z_1} e_1^+ & E_1^- &= \sqrt{Z_1} e_1^- \\ E_2^+ &= \sqrt{Z_2} e_2^+ & E_2^- &= \sqrt{Z_2} e_2^- \end{aligned}$$

é inmediato comprobar que os cadrados dos campos e_i^ϵ son os módulos dos vectores de Poynting das ondas planas correspondentes. Despexamos os campos no medio 2:

$$\begin{aligned} e_2^+ &= \frac{1}{2\sqrt{Z_1Z_2}} [(Z_1 + Z_2)e_1^+ + (Z_1 - Z_2)e_1^-] \\ e_2^- &= \frac{1}{2\sqrt{Z_1Z_2}} [(Z_1 - Z_2)e_1^+ + (Z_1 + Z_2)e_1^-] \end{aligned}$$

Definindo a *matriz de transmisión* S como

$$\Sigma = \frac{1}{2\sqrt{Z_1Z_2}} \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_1 - Z_2 \\ Z_1 - Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

pódese escribir

$$\begin{pmatrix} e^+ \\ e^- \end{pmatrix}_2 = \Sigma \begin{pmatrix} e^+ \\ e^- \end{pmatrix}_1 \quad (4.9)$$

O formalismo da matriz de transmisión tamén é aplicable á impedancia superficial. Supoñamos que hai ondas incidentes polos dous lados dunha lámina plana de impedancia superficial Z_s . En función dos campos reducidos e :

$$\begin{aligned} e_1^- &= \frac{1}{2Z_s + Z_0} (-Z_0e_1^+ + 2Z_s e_2^-) \\ e_2^+ &= \frac{1}{2Z_s + Z_0} (2Z_s e_1^+ + -Z_0e_2^-) \end{aligned}$$

chegamos a que

$$\begin{aligned} e_2^+ &= \frac{1}{2Z_s} [(2Z_s - Z_0)e_1^+ - Z_0e_1^-] \\ e_2^- &= \frac{1}{2Z_s} [Z_0e_1^+ + (2Z_s + Z_0)e_1^-] \end{aligned}$$

sendo a matriz de transmisión a seguinte:

$$\Sigma = \frac{1}{2Z_S} \begin{pmatrix} 2Z_S - Z_0 & -Z_0 \\ Z_0 & 2Z_S + Z_0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Compróbase nos dous casos que $\det \Sigma = 1$.

As propiedades de reflexión e a transmisión a través dun sistema de discontinuidades pódense representar por unha matriz de transmisión

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{21} - \frac{r_{11}r_{22}}{\tau_{12}} & \frac{r_{22}}{\tau_{12}} \\ -\frac{r_{11}}{\tau_{12}} & \frac{1}{\tau_{12}} \end{pmatrix}$$

co único requisito de que o sistema teña comportamento lineal. Nos coeficientes r e τ o segundo subíndice representa o medio desde o que incide a onda e o primeiro o medio no que se propaga a onda reflexada ou transmitida.

Propiedades da matriz de transmisión

1. A matriz de transmisión correspondente a unha serie de superficies de discontinuidade paralelas é o produto das matrices de transmisión das superficies e dos espaciados entre elas.
2. A matriz de transmisión inversa é ³

$$\Sigma_{inv} = \frac{1}{\det \Sigma} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & -\sigma_{21} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

3. Os coeficientes r e τ de reflexión e transmisión pra campos reducidos e^e_i pódense calcular a partir da matriz de transmisión ⁴:

$$r_{11} = -\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{22}}, \quad \tau_{21} = \sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}\sigma_{21}}{\sigma_{22}} = \frac{\det \Sigma}{\sigma_{22}} \quad (4.13)$$

4. $\det \Sigma = 1$ se e solo se o sistema é *recíproco*, é dicir, se $\tau_{12} = \tau_{21}$.
5. Se as ondas son monocromáticas, un espaciado d entre dúas superficies pódese representar pola matriz de transmisión

$$\Sigma = \begin{pmatrix} e^{-ikd} & 0 \\ 0 & e^{ikd} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

INCIDENCIA OBLICUA. LEIS DE SNELL

Suponse que unha onda plana propagándose nun medio 1 con velocidade v_1 e na dirección \hat{n}^+ incide sobre unha superficie S plana e infinita de separación entre dous medios, que supoñemos pasa polo orixen. Unha parte da onda volve ó medio 1 e outra transmítese ó medio

³ É a matriz inversa Σ^{-1} coas filas e columnas invertidas, pra restablecer as direccións de propagación correctas despois de intercambiar os medios 1 e 2 .

⁴ O coeficiente de transmisión cumpre $t = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \tau$

2. Sea v_2 a velocidade de propagación neste medio. A simetría traslacional do sistema esixe que as ondas transmitida e reflexada sean tamén planas. Supoñamos que as direccións de propagación destas sean $\hat{\mathbf{n}}^-$ e $\hat{\mathbf{n}}'$, respectivamente.

Na superficie deberanse satisfacer unhas determinadas condicións de fronteira. Por exemplo, as compoñentes tanxenciais do campo eléctrico deben ser continuas. Por tratarse de ondas planas,

$$\begin{aligned}\psi^+ &= f^+\left(\hat{\mathbf{n}}^+ \cdot \mathbf{r}/v_1 - t\right) \\ \psi^- &= f^-\left(\hat{\mathbf{n}}^- \cdot \mathbf{r}/v_1 - t\right) \\ \psi' &= f'\left(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{r}/v_2 - t\right)\end{aligned}$$

Se $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal á superficie, dirixida cara ó medio l , a superficie é o conxunto de puntos $\{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}' | \mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3\}$. Como ademáis $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}' = \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'$, a condición de fronteira $\psi^+|_S + \psi^-|_S = \psi'|_S$ esixe que

$$f^+\left(\frac{1}{v_1} \hat{\mathbf{n}}^+ \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}' - t\right) + f^-\left(\frac{1}{v_1} \hat{\mathbf{n}}^- \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}' - t\right) - f'\left(\frac{1}{v_2} \hat{\mathbf{n}}' \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}' - t\right) = 0, \quad \forall \mathbf{r}', t$$

Tomando $\mathbf{r}' = 0$ e t arbitrario conclúese que $f^+ + f^- = f'$. Pero como a igualdade se téen que manter sendo f^+ arbitrario, hai que esixir tamén que os argumentos das funcións sean iguaes, independentemente de \mathbf{r}' , o que significa que

$$\frac{\hat{\mathbf{n}}^+ \times \hat{\mathbf{n}}}{v_1} = \frac{\hat{\mathbf{n}}^- \times \hat{\mathbf{n}}}{v_1} = \frac{\hat{\mathbf{n}}' \times \hat{\mathbf{n}}}{v_2} \quad (4.14)$$

Unha primeira conclusión é que as direccións de propagación das tres ondas e a normal á superficie están nun mesmo plano (as catro son perpendiculares a $\hat{\mathbf{n}}^+ \times \hat{\mathbf{n}}$).

Se chamamos α^+ , α^- e α' ós ángulos que as direccións de propagación forman coa normal, como na fig. 4.2, da primeira igualdade resulta sen $\alpha^+ = \text{sen } \alpha^-$ e

$$\alpha^+ = \alpha^- \quad (4.15)$$

Da segunda igualdade en (4.14) dedúcese que $\text{sen } \alpha^+/v_1 = \text{sen } \alpha'/v_2$. Defínese o *índice de refracción* n dun medio i como o cociente entre a velocidade de propagación do campo electromagnético no vacío e no medio

$$n_i = \frac{c}{v_i} \quad (4.16)$$

En función dos índices de refracción temos

$$n_1 \text{ sen } \alpha^+ = n_2 \text{ sen } \alpha' \quad (4.17)$$

As ecuacións (4.15) e (4.17) conócense como *leis de Snell* da reflexión e da refracción.

Se $n_1 \text{ sen } \alpha^+ > n_2$ non existe ningún ángulo α' que cumpla a relación (4.17). Nestas condicións non hai onda transmitida (*reflexión total*). O ángulo α_c que cumple $n_1 \text{ sen } \alpha_c = n_2$ chámase *ángulo crítico*.

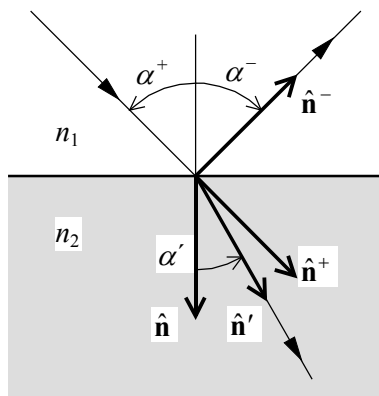


Fig. 4.2

Efecto Goos-Hänchen

Sea $n_1 > n_2$, e supoñamos unha onda incidente según un ángulo $\alpha^+ > \alpha_c$. Por simplicidade da interpretación, supoñamos que o medio 2 está en $z > 0$. Según a lei de Snell, o ángulo da onda transmitida cumprirá

$$n'_z = \cos \alpha' = \sqrt{1 - \frac{n_1^2 \operatorname{sen}^2 \alpha^+}{n_2^2}} = \pm i \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha^+}{\operatorname{sen}^2 \alpha_c} - 1}$$

Un coseno imaxinario é perfectamente válido na notación complexa de campos monocromáticos. A dirección de propagación tén compoñente n'_x (paralela á superficie) real. De $\cos^2 \alpha' + \operatorname{sen}^2 \alpha' = 1$:

$$n'_x = \frac{\operatorname{sen} \alpha^+}{\operatorname{sen} \alpha_c}$$

En consecuencia, no medio 2 existirá unha onda ⁵

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{-|n'_z|kz} e^{-in'_x kx} \quad (4.18)$$

propagándose paralelamente á superficie, pero atenuada na dirección normal a ela, que se denomina *onda superficial*. Que non hai onda transmitida debe interpretarse simplemente como que esta onda non transporta enerxía na dirección z . Isto é así porque

$$S_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E^2 n'_z) = 0$$

COEFICIENTES DE FRESNEL EN INCIDENCIA OBLICUA

As relacións (3.9) e as condicións de continuidade das *compoñentes tanxenciais* que permitiron calcular os coeficientes r e t en incidencia normal son aplicables tamén en incidencia oblicua. Os coeficientes (4.2) calculáronse a partir das condicións de contorno dos campos, paralelos á superficie. As condicións son as mesmas cando as ondas inciden formando un ángulo α coa normal. O campo eléctrico da onda incidente formará un certo ángulo co plano de polarización, e poderá descompoñerse nunha compoñente “no plano” e outra “perpendicular ó plano”. Faremos un estudio separado destas dúas compoñentes, que chamaremos respectivamente *incidencia no plano* e *incidencia normal ó plano*.

a) incidencia no plano

As compoñentes tanxenciais dos campos son $E_t = E \cos \alpha$, $H_t = H$. A relación entre elas é

$$\mathbf{E}_t = -Z' \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_t, \quad (4.19)$$

con $Z' = Z \cos \alpha$. Logo, en vez de (4.2) debemos poñer

$$\frac{E_t^-}{E_t^+} = \frac{E^- \cos \alpha^-}{E^+ \cos \alpha^+} = \frac{Z_2 \cos \alpha' - Z_1 \cos \alpha^+}{Z_2 \cos \alpha' - Z_1 \cos \alpha^+}$$

$$\frac{E'_t}{E_t^+} = \frac{E' \cos \alpha'}{E^+ \cos \alpha^+} = \frac{2Z_2 \cos \alpha'}{Z_2 \cos \alpha' - Z_1 \cos \alpha^+}$$

⁵ Débese escoller o signo de n_z de maneira que o argumento da exponencial en z sea negativo. O caso contrario non tería sentido físico.

Polas leis de Snell, $\cos \alpha^- = \cos \alpha^+$, e $\cos \alpha' = \frac{1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha^+}$. Por outro lado ⁶,

$Z_i = \mu_i/n_i c$. Deducimos

$$r_{\parallel} = \frac{E^-}{E^+} = \frac{n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} - \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \alpha}{n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \alpha} \quad (4.20)$$

$$t_{\parallel} = \frac{E'}{E^+} = \frac{2n_1 n_2 \cos \alpha}{n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \alpha}$$

b) incidencia normal ó plano

Agora $E_t = E$, $H_t = H \cos \alpha$. A impedancia correspondente en (4.19) é $Z' = Z/\cos \alpha$. Logo

$$\frac{E_t^-}{E_t^+} = \frac{E^-}{E^+} = \frac{Z_2/\cos \alpha' - Z_1/\cos \alpha^+}{Z_2/\cos \alpha' + Z_1/\cos \alpha^+}$$

$$\frac{E_t'}{E_t^+} = \frac{E'}{E^+} = \frac{2Z_2/\cos \alpha'}{Z_2/\cos \alpha' + Z_1/\cos \alpha^+}$$

e resultan os coeficientes de Fresnel seguintes:

$$r_{\perp} = \frac{E^-}{E^+} = \frac{n_1 \cos \alpha - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}}{n_1 \cos \alpha + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}} \quad (4.21)$$

$$t_{\perp} = \frac{E'}{E^+} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}}$$

Cando \mathbf{E} é paralelo ó plano de incidencia, pra un certo ángulo α_B (*ángulo de Brewster*) o coeficiente de reflexión é cero. Por (4.20),

$$n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_B} = n_2^2 \cos \alpha_B \Rightarrow \cos^2 \alpha_B = \frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}, \text{ ou sea}$$

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.22)$$

⁶ Frecuentemente, sobre todo en medios ópticos, $\mu_1 \cong \mu_2 \cong \mu_0$.