ONDAS CONFINADAS

Entendemos por guía de onda un sistema con simetría traslacional nunha dirección z polo que se pode propagar unha onda electromagnética. A forma normal é unha cavidade limitada por paredes conductoras (fig. 1).

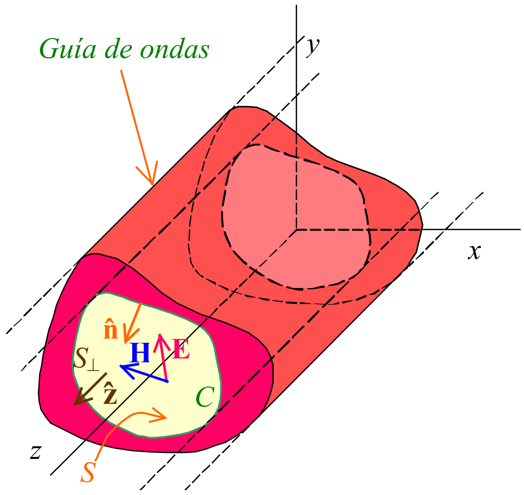

Fig. 5.1

No interior dun conductor perfecto o campo eléctrico é cero, e o magnético constante. Considerando solo campos alternos, tanto **E** coma **H** serán nulos, salvo términos de perdas que non afectarán substancialmente ós campos calculados fóra deles.

Esto implica que na superficie dun conductor

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}\big|_S &= 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}\big|_S &= 0 \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Como veremos, unha guía de onda é un sistema dispersivo, incluso considerando os conductores perfectos, polo tanto será conveniente considerar os campos monocromáticos e tratalos en notación complexa.

POTENCIALES DE DEBYE

Se un campo **F** é solución da ecuación vectorial de Helmholtz, a súa compoñente lonxitudinal F_z tamén, porque, pola definición do laplaciano vectorial:

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\nabla^2 \mathbf{F} + \beta^2 \mathbf{F}\right) = \nabla^2 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{F}) + \beta^2 \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{F} =$$
$$= \nabla^2 F_z + \beta^2 F_z = 0$$

Se ψ é unha solución da ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \psi + \beta^2 \psi = 0$$

podémola identificar coa compoñente lonxitudinal do campo magnético e definir un *modo transversal eléctrico* (*TE*) como o que cumple

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{H} &= \psi \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

De forma parecida definimos un *modo transversal magnético* (*TM*):

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E} &= \psi \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{H} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

As compoñentes lonxitudinales de **E** e **H** permiten construir o campo electromagnético destes modos. Chámanse *potenciales de Debye*.

Cando os dous campos son transversales, tense o modo transversal electromagnético, *TEM*:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{H} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

A existencia de modos *TEM* implica que, en xeneral, a determinación do campo electromagnético a partir dos potenciales de Debye non é unívoca.

Parámetros de corte

Sea $k = \beta = \omega/v$ é a constante de propagación *libre* no interior da guía [1]. Propoñémonos obter un conxunto ortogonal completo [2] de solucíós da ecuación de Helmholtz, que chamaremos *modos normales*, nunha guía de ondas. A dependencia espacial dos campos nunha sección $S_\perp$ da guía, de ecuación $\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{r} = z$, cte., depende da xeometría concreta da sección, pero esixiremos que nun *modo normal* a dependencia na dirección z sea sinusoidal:

$$\mathbf{E}\big|_z = \mathbf{E}\big|_0 e^{-i\beta_z z} \quad ; \quad \mathbf{H}\big|_z = \mathbf{H}\big|_0 e^{-i\beta_z z} \tag{5.5}$$

onde é $\mathbf{E}|_z$ e $\mathbf{H}|_z$ son as restricciós de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ á superficie $\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{r} = z$; $\beta_z = \omega/v_f$ é a *constante de propagación guiada*, sendo v_f á velocidade de fase na guía.

Definimos os operadores diferenciales transversales como os mesmos operadores restrinxidos a unha superficie $\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{z}} = z$, con z constante, é dicir, aplicados como se o campo non dependese de z. Supoñendo a descomposición ortogonal $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_\| = \mathbf{F}_\perp + \hat{\mathbf{z}}F_z$, defínese a *diverxencia transversal* de $\mathbf{F}$, $\nabla_\perp\cdot\mathbf{F}$, pola relación

$$\nabla_\perp\cdot\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}_\perp \tag{5.6}$$

Os operadores transversales manteñen entre eles, por definición, as mesmas relaciós puntuales ca os tridimensionales [3]. Así definimos *gradente*, *rotacional* e *laplaciano transversales* como os que cumplen

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}\cdot\nabla_\perp\psi = \nabla_\perp\cdot(\psi\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}\cdot\nabla_\perp\times\mathbf{F} = \nabla_\perp\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{u}) \\ \nabla_\perp^2\psi = \nabla_\perp\cdot\nabla_\perp\psi \\ \mathbf{u}\cdot\nabla_\perp^2\mathbf{F} = \nabla_\perp^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{F})\end{array}\right\}, \forall\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3 \tag{5.7}$$

Supoñamos un modo *TE* ou *TM*. Se ψ é o potencial de Debye, na ecuación de Helmholtz o laplaciano pódese descompoñer nunha parte transversal e outra lonxitudinal, quedando:

$$\nabla^2\psi + \beta^2\psi = \nabla_\perp^2\psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \beta^2\psi = \nabla_\perp^2\psi + \left(\beta^2 - \beta_z^2\right)\psi = 0\,,$$

Poñendo

$$\beta_c = \sqrt{\beta^2 - \beta_z^2} \quad , \quad \beta_z^2 = \beta^2 - \beta_c^2 = \mu\varepsilon\left(\omega^2 - \omega_c^2\right), \tag{5.8}$$

sendo β a constante de propagación libre, e a ecuación (3.11) queda como

$$\nabla_\perp^2\psi + \beta_c^2\psi = 0 \tag{5.9}$$

Tamén, dada a forma do laplaciano vectorial en (5.7),

$$\nabla_\perp^2\mathbf{E} + \beta_c^2\mathbf{E} = 0 \quad ; \quad \nabla_\perp^2\mathbf{H} + \beta_c^2\mathbf{H} = 0 \tag{5.10}$$

---

[1] É dicir, a constante de propagación se non existisen as paredes conductoras. Que k non teña compoñente imaxinaria significa que o medio non tén perdas.

[2] Tal que o campo na guía se poida descompoñer en suma destes modos.

[3] Exclúense os teoremas integrales (de Gauss, de Stokes, etc.) na súa forma tridimensional.

β_c chámase *constante de corte*.

Cando esta ecuación se resolve na superficie $S_\perp$ con condiciós de contorno na curva C que a limita, β_c tomará un conxunto discreto de valores doblemente numerable ($\beta_{c,mn}$), dependendo da xeometría da sección. Cada un destes valores corresponde a un *modo de propagación*. Defínese unha *frecuencia de corte* ω_c pra cada modo

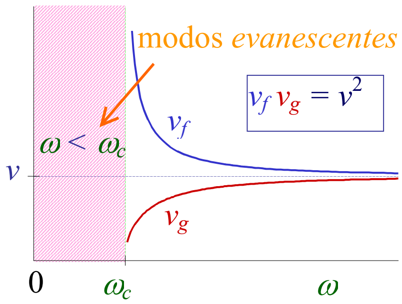

Fig. 5.2

$$\omega_{c,mn} = \frac{\beta_{c,mn}}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{5.11}$$

Se a frecuencia da onda é menor ca a frecuencia de corte, a constante β será imaxinaria, e a onda será unha exponencial decrecente, cunha *fondura de penetración*

$$\delta_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon\left(\omega_{c,mn}^2 - \omega^2\right)}} \tag{5.12}$$

Neste caso non hai propagación, e dise que se trata dun *modo evanescente*.

A partir de (5.8), tendo en conta (3.20) e (3.21), as velocidades de fase e grupo na guía son

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}} > v \\ v_g &= \left(\frac{d\beta_z}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{\omega} < v \end{aligned} \tag{5.13}$$

Modos TE e TM

Supoñamos que nun modo *TE* ou *TM* sea o campo **F** (**E** ou **H**) o que tén compoñente lonxitudinal ($F_z \neq 0$). Esto significa que $\nabla\times\mathbf{F}$ é transversal. En ausencia de fontes, $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$. Logo

$$\nabla_\perp\cdot\mathbf{F}_\perp = \nabla_\perp\cdot\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} - \frac{\partial F_z}{\partial z} = i\beta_z F_z \tag{5.14}$$

O campo $\mathbf{F}_\perp$ debe cumplir a ecuación de ondas transversal (5.9). Substituindo nela a anterior:

$$\nabla_\perp^2\mathbf{F}_\perp = \nabla_\perp\nabla_\perp\cdot\mathbf{F}_\perp - \nabla_\perp\times\nabla_\perp\times\mathbf{F}_\perp = i\beta_z\nabla_\perp F_z - \nabla_\perp\times\nabla_\perp\times\mathbf{F}_\perp = -\beta_c^2\mathbf{F}_\perp$$

Como $\mathbf{u}\cdot\nabla_\perp\times\mathbf{F}_\perp = \nabla_\perp\cdot(\mathbf{F}_\perp\times\mathbf{u}) = \nabla_\perp\cdot(\mathbf{F}_\perp\times\mathbf{u}_\parallel) + \nabla_\perp\cdot(\mathbf{F}_\perp\times\mathbf{u}_\perp)$ e $\nabla_\perp\cdot(\mathbf{F}_\perp\times\mathbf{u}_\perp) = 0$, $\nabla_\perp\times\mathbf{F}_\perp$ non tén compoñente transversal. E na igualdade

$$\nabla\times\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}_\parallel + \nabla\times\mathbf{F}_\perp = -\hat{\mathbf{z}}\times\left(\nabla F_z\right) + \nabla_\perp\times\mathbf{F}_\perp + \frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{F}_\perp\right),$$

sabemos que tódolos términos aparte de $\nabla_\perp\times\mathbf{F}_\perp$ son transversales, logo $\nabla_\perp\times\mathbf{F}_\perp$ tamén. Logo $\nabla_\perp\times\mathbf{F}_\perp = 0$. Consecuentemente:

$$\mathbf{F}_\perp = -i\frac{\beta_z}{\beta_c^2}\nabla_\perp F_z \tag{5.15}$$

Impedancia de onda

Consideremos unha onda *TE* e sea **F** = **H**. Polas lei de Maxwell,

$$i\omega\varepsilon\,\mathbf{E} = \nabla\times\mathbf{H} = \left[\nabla_\perp\times\mathbf{H} + \frac{\partial}{\partial z}(\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{H})\right]$$

O primeiro término da direita resulta:

$$\nabla_\perp\times\mathbf{H} = \nabla_\perp\times\left(\mathbf{H}_\perp + \hat{\mathbf{z}}H_z\right) = -\hat{\mathbf{z}}\times\nabla_\perp H_z = -i\frac{\beta_c^2}{\beta_z}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{H} \tag{5.16}$$

Levando esto á ecuación anterior:

$$\mathbf{E} = -\frac{\beta}{\beta_z}Z\,\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{H} \quad (\text{modos}\,TE) \tag{5.17}$$

onde Z é a impedancia correspondente á propagación libre. Esto quere dicir que nun modo *TE* os campos **E** e $\mathbf{H}_t$ están relacionados por un factor de proporcionalidade que tén dimensiós de impedancia.

Nos modos *TM* pasa algo parecido:

$$\mathbf{H} = \frac{\beta}{\beta_z}\frac{1}{Z}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E} \quad (\text{modos}\,TM) \tag{5.18}$$

A relación entre as compoñentes transversales de **E** e **H**, independente do punto da guía considerado, chámase *impedancia de onda*:

$$Z_{TE} = \frac{\beta}{\beta_z}Z \quad ; \quad Z_{TM} = \frac{\beta_z}{\beta}Z \tag{5.19}$$

As ecuaciós (5.14), (5.15) e (5.17) determinan os campos, supostos non nulos os potenciales de Debye.

Condiciós de contorno

Quedan por dar as condiciós de contorno que debemos utilizar pra resolver (5.9). No que sigue enténdese que a guía de ondas tén unha sección normal $S_\perp$ limitada pola curva C.

Nun modo *TM* faremos $\psi = E_z$. Como na superficie do conductor é unha compoñente tanxencial, a condición é

$$\psi|_C = 0 \tag{5.20}$$

Nos modos *TE*, $\psi = H_z$, e o campo magnético transversal sale de (5.15). A condición de contorno é, logo

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla_\perp\psi|_C = 0 \tag{5.21}$$

Exemplo 5.1: Guía de ondas rectangular

Supoñamos que unha onda se propaga no interior dun tubo conductor de sección rectangular de dimensiós interiores *a* e *b* según as direcciós *X* e *Y*. Suponse *a* > *b*. A ecuación transversal de Helmholtz, en coordenadas rectangulares, é

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \beta_c^2\psi = 0$$

Por separación de variables obtense a solución

$$\psi(x, y) = (A_1 \cos \beta_x x + B_1 \operatorname{sen} \beta_x x)\,(A_2 \cos \beta_y y + B_2 \operatorname{sen} \beta_y y),$$

con $\beta_c^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2$.

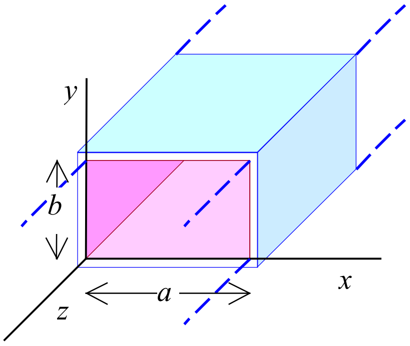

Fig. 5.3

Modos TE

Impoñendo as condiciós de contorno $\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\psi|_C = 0$, ou sea

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=b} = 0$$

resulta o potencial de Debye

$$\psi_{mn}^{TE}(x, y) = H_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{5.22}$$

onde as constantes de separación son $\beta_x^2 = \pi^2 m^2/a^2$ e $\beta_y^2 = \pi^2 n^2/b^2$. En consecuencia obtemos unhos parámetros de corte:

$$\beta_c^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \tag{5.23}$$

Modos TM

As condiciós de contorno que se deben aplicar aquí son $\psi|_C = 0$. Resulta

$$\psi_{mn}^{TM}(x, y) = E_0 \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \tag{5.24}$$

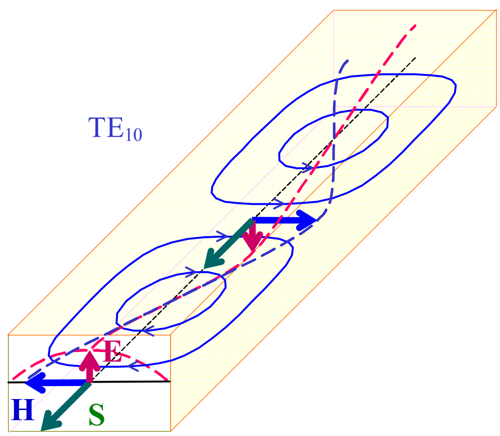

Fig. 5.4

e os parámetros de corte volven ser os de (5.23). Débese notar unha diferencia co caso TE. Se $m = 0$ ou $n = 0$, o potencial de Debye faise cero en todo (x, y), logo o modo non existe. Por eso o modo transversal magnético de frecuencia de corte máis baixa é o TM_{11}.

Modos dominantes. Modo TE_{10}

Un modo que tén frecuencia de corte menor ca calquera outro chámase *modo dominante* ou *fundamental*. Este modo sempre está entre os que se póden propagar, en caso de haxa algún que poida, e cunhas dimensiós adecuadas da guía pódese conseguir que sea o único que se propaga.

Nunha guía rectangular, supoñendo $a > b$, o modo dominante é o TE_{10}. A frecuencia de corte deste modo é $\omega_{10} = \dfrac{\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}$. Os campos son

$$
\begin{aligned}
H_z &= H_0 \cos\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_z z} \\
\mathbf{H}_\perp &= -i\frac{\beta_z}{\beta_c^2}\nabla_\perp H_z = \hat{\mathbf{x}}\frac{i\beta_z a}{\pi} H_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_z z} \\
\mathbf{E} &= -\frac{\beta}{\beta_z} Z\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{H} = -\hat{\mathbf{y}}\frac{i\beta a}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_z z}
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

MODOS TEM

Se $E_z = 0$ e $H_z = 0$ e os campos transversales non son nulos, en (5.15) necesariamente debe ser $\beta_c = 0$, logo $\beta_z = \beta$. É dicir, a velocidade de propagación guiada é igual á velocidade de propagación libre, e o sistema non presenta dispersión.

Pero, según (5.16), $\nabla_\perp\times\mathbf{H} = 0$, e da mesma maneira tamén obteríamos $\nabla_\perp\times\mathbf{E} = 0$. Solo podemos obter un campo eléctrico non nulo se facemos [4]

$$\mathbf{E} = -\nabla_\perp\phi. \tag{5.26}$$

Este ϕ chámase *función potencial*.

Pero se o contorno C que limita $S_\perp$ é simple, $\psi|_C$ sería constante, e polo tanto constante en $S_\perp$, e esto significaría $\mathbf{E} = 0$. Logo o modo *TEM* solo existe se o contorno é múltiple, é dicir, se a sección é *múltiplemente conexa* (fig. 5). Esto esixe que a guía debe constar de máis dun conductor. As condiciós de contorno serán

$$\psi|_{C_i} = \phi_i(z) \tag{5.27}$$

Os ϕ_i correspondentes a cada conductor chámanse *función potencial* do conductor.

Outro argumento que leva á mesma conclusión é que no medio homogéneo, lineal e isótropo que estamos supoñendo tamén $\nabla_\perp\cdot\mathbf{H} = 0$, polo que $\mathbf{H}$ sería nulo a menos que $S_\perp$ non sea simplemente conexa. En todo caso, por (5.18), podemos escribir

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}, \tag{5.28}$$

o que significa que a impedancia de onda é igual á impedancia do medio:

$$Z_{TEM} = Z. \tag{5.29}$$

Por outro lado, sabendo que $E_z = 0$ e polo tanto a tamén é cero a compoñente z da corrente de desplazamento, nunha curva C_i que rodea a un cada conductor teríamos

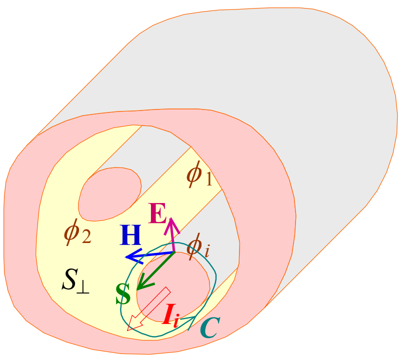

Fig. 5.5

$$I_i(z) = \int_{S_i}\mathbf{J}_f\cdot d\mathbf{a} = \oint_{C_i}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} \tag{5.30}$$

sendo I_i a intensidade no conductor i na sección $S_\perp$ [5]

[4] Esto non quere dicir que **E** sea conservativo, solo que a restricción de **E** a unha superficie $S_\perp$ normal á dirección de propagación é conservativa.

[5] Tanto I_i como ϕ_i dependen de z.

O caso máis simple de guía *TEM* é a línea de transmisión de dous conductores paralelos. Chámase *impedancia característica* da línea de dous conductores á magnitude

$$Z_{car} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{I_1} \tag{5.31}$$

Xa que os campos **E** e **H** teñen a mesma dependencia de z, Z_{car} non depende de z.

Exemplo 5.2: cable coaxial

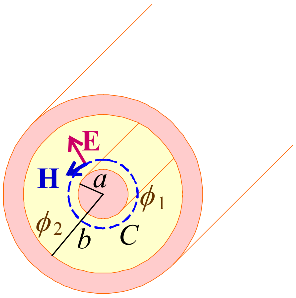

Fig. 5.6

Supoñamos un cable formado por dous conductores cilíndricos coaxiales (fig. 6). Resolvendo (5.26) coas condiciós de contorno

$$\phi(a) = \phi_1$$
$$\phi(b) = \phi_1$$

obtemos o campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\ln \frac{b}{a}} \frac{\hat{\boldsymbol{\zeta}}}{\zeta}$$

e un campo magnético

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{Z \ln \frac{b}{a}} \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\zeta}$$

Calculando a circulación de **H** sobre a curva C que rodea o conductor central:

$$I_1 = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi \frac{\phi_1 - \phi_2}{Z \ln \frac{b}{a}}$$

Polo tanto a impedancia característica do cable é

$$Z_{cable} = \frac{Z}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \tag{5.32}$$

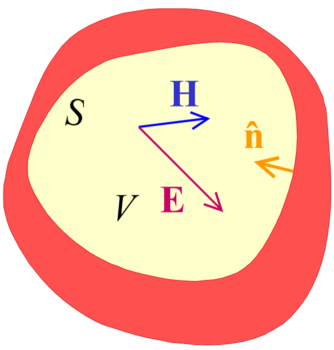

Fig. 5.7

Cavidades resonantes

Unha cavidade resonante (fig. 7) é un volumen limitado por unha superficie S conductora. As condiciós de contorno (5.1) $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}|_S = 0, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}|_S = 0$ fan que β tome un conxunto discreto de valores β_{mnp}. Cada un destes valores corresponde a unha *frecuencia de resonancia*.

Exemplo 5.3

Nunha cavidade esférica de radio a os campos pódense expresar como unha suma de términos multipolares da forma (3.47) e (3.48), con $R_l = j_l$. Cada modo (l, m) cumpliría as condiciós de contorno solo pra un conxunto discreto $\{k_p\}$ de valores de k, que determinarían as frecuencias de resonancia ω_{lmp} pra cada tipo de modo [6] (eléctrico ou magnético). Por exemplo, consideremos o término $\{\mathbf{E}^{(E)}{}_{10}, \mathbf{H}^{(E)}{}_{10}\}$. Por ser un modo eléctrico, o campo magnético non tén compoñente radial, e cumple a condición de contorno independentemente de k. Pero que a compoñente tanxencial de **E** sea cero esixe que

$$\mathbf{E}_{10}^{(E)} = -\frac{Z_0}{kr}\left[\hat{\mathbf{r}}\, l(l+1) j_1(kr) Y_{10} + \frac{d}{dr}[r j_1(kr)] r \nabla Y_{10}\right]$$

non teña compoñente tanxencial en $r = a$, é dicir que

$$\left.\frac{d\left[r j_1\left(k_p r\right)\right]}{dr}\right|_{r=a} = \left[1 - \frac{1}{\left(k_p a\right)^2}\right] \operatorname{sen} k_p a + \frac{\cos k_p a}{k_p a} = 0$$

Dado que as funciós j_l son oscilantes, esta ecuación tén un número infinito de soluciós, correspondentes a tódolos valores inteiros de p maiores ou iguales que *1*. A primeira tense en $ka = 2.7437$.

Unha forma simple de obter cavidades resonantes é cerrar un tramo de guía de ondas polos dous extremos mediante planos conductores transversales. Nas terminaciós refléxanse as ondas. A superposición de ondas propagándose nos dous sentidos produce unha situación de ondas estacionarias:

$$\left.\mathbf{E}\right|_z = \left.\mathbf{E}^+\right|_z + \left.\mathbf{E}^-\right|_z = \left.\mathbf{E}^+\right|_0 e^{-i\beta_z z} + \left.\mathbf{E}^-\right|_0 e^{i\beta_z z} \tag{5.33}$$

Supoñamos que os extremos están en $z = 0$ e $z = l$. Se a guía traballa nun modo TE_{mn}, as condiciós $\mathbf{E}_t|_S = 0$ ou $H_z|_S = 0$ non extremos conducen a

$$\mathbf{E}|_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{E}^-|_0 = -\mathbf{E}^+|_0$$

$$\left.\mathbf{E}\right|_l = 0 \Rightarrow e^{-i\beta_z l} - e^{i\beta_z l} = -2i \operatorname{sen}\left(\beta_z l\right) = 0$$

co que temos a condición de resonancia:

$$\beta_z l = p\pi\,, \tag{5.34}$$

con p inteiro positivo. Dise que a cavidade traballa no modo TE_{mnp}.

Da mesma maneira, se a guía conduce un modo TM_{mn}, a condición de resonancia $\mathbf{E}_t|_S = 0$ dá un modo resonante TM_{mnp}.

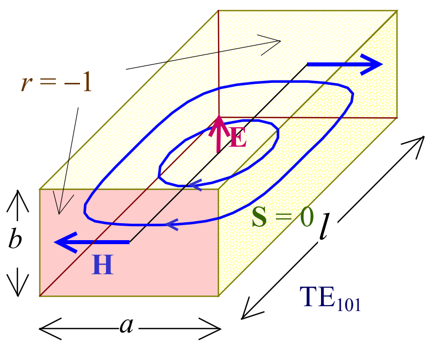

Fig. 5.8

Exemplo 5.3: cavidade en modo TE_{101}

Partindo dunha guía de ondas rectangular operando en no modo fundamental TE_{10} podemos construir unha cavidade resonante cerrándoa con dous planos conductores perpendiculares ó eixe z en puntos $z = 0$ e $z = l$ (fig. 5.8).

A partir do potencial de Debye do modo TE_{10}

$$H_z = H_0 \cos\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_z z}$$

[6] Neste caso o índice m é dexenerado, xa que o cumplimento da condiciós vén determinado por $j_l\,(kr)$.

calculamos como en (5.25) os campos das ondas que se propagan na dirección positiva de z:

$$\mathbf{H}^{+} = H_0^{+}\left(\hat{\mathbf{z}}\cos\frac{\pi x}{a} + \hat{\mathbf{x}}\frac{i\beta_z a}{\pi} H_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\right)e^{-i\beta_z z}$$

$$\mathbf{E}^{+} = -\hat{\mathbf{y}}\frac{i\beta a}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,H_0^{+}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}e^{-i\beta_z z}$$

e da onda reflexada, tendo en conta que nesta a constante de propagación guiada é $-\beta_z$:

$$\mathbf{H}^{-} = H_0^{-}\left(\hat{\mathbf{z}}\cos\frac{\pi x}{a} - \hat{\mathbf{x}}\frac{i\beta_z a}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\right)e^{i\beta_z z}$$

$$\mathbf{E}^{-} = -\hat{\mathbf{y}}\frac{i\beta a}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,H_0^{-}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}e^{i\beta_z z}$$

Os campos $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{+} + \mathbf{H}^{-}$ e $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{+} + \mathbf{E}^{-}$ deben satisfacer as condiciós de contorno (5.1) en $z = 0$ e en $z = l$. Por exemplo, impoñendo $H_z|_{z=0} = 0$, $H_z|_{z=l} = 0$, ténse

$$H_0^{+} = -H_0^{-} = -\frac{1}{2}H_0$$

$$\beta_z = \frac{p\pi}{l}$$

Con $p = 1$ resulta o modo resonante fundamental (TE_{101}):

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= \hat{\mathbf{y}}Z_0 H_0\frac{\beta a}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{c}\\ \mathbf{H} &= iH_0\left(\hat{\mathbf{z}}\cos\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{c} - \hat{\mathbf{x}}\frac{a}{c}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{c}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.35}$$

O factor i que multiplica a todo o campo **H** significa que vai desfasado $\pi/2$ con respecto a **E**, ou sea, que varía como $-$sen ωt, mentras **E** varía como cos ωt. Este é o punto esencial da resonancia: a enerxía oscila entre as formas de enerxía eléctrica e magnética.

PERDAS EN GUÍAS DE ONDAS E CAVIDADES RESONANTES

En todo o anterior considerouse que as condiciós de contorno (5.1) se cumplían rigurosamente. Na realidade o conductor tén unha certa impedancia superficial

$$Z_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+i) \tag{5.36}$$

e debido a ela o campo eléctrico na superficie tén compoñente tanxencial $\mathbf{E}_t = Z_S\,\mathbf{K}_f$. Esta compoñente é moito máis pequena ca os campos calculados pra conductores ideales e non invalida o tratamento feito. Pero cando se quere ter en conta as perdas é necesario introducila.

Evaluamos a potencia disipada na superficie por medio do vector de Poynting:

$$P_{dis} = \int_S \langle\mathbf{E}\times\mathbf{H}\rangle\cdot d\mathbf{a}$$

Usando a condición de fronteira

$$\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}|_{S'} = \mathbf{K}_f$$

expresamos a integral en función de **H** solo:

$$P_{dis} = \frac{1}{2}\int_{S'} \mathrm{Re}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)\cdot d\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\int_{S'} \mathrm{Re}\left[Z_S\,(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H})\times\mathbf{H}^*\right]\cdot d\mathbf{a}$$

(o signo negativo débese a que a normal vai dirixida pra dentro da cavidade). A contribución á integral da compoñente normal de **H** póde ser despreciada. Así:

$$P_{dis} = \frac{1}{2}\int_{S'} |H|^2 \,\mathrm{Re}\, Z_S\, da\,, \tag{5.37}$$

sendo $|H|^2 = |\mathbf{H}_\perp|^2 + |H_z|^2$ o calculado no caso ideal.

Nuha cavidade defínese o factor de calidade Q como unha relación entre a enerxía electromagnética contida na cavidade e a disipada por período:

$$Q = 2\pi\frac{U_{em}}{TP_{dis}} = \frac{\omega U_{em}}{P_{dis}} \tag{5.38}$$