

## RADIACIÓN

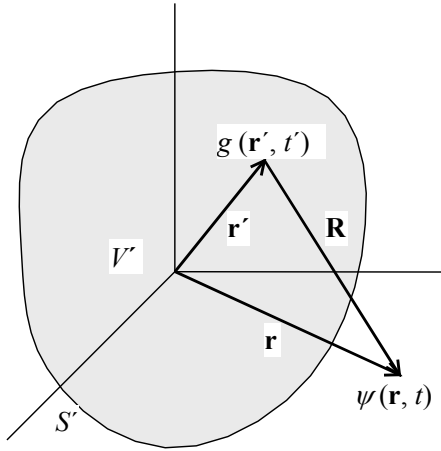


Fig.6.1

As ondas electromagnéticas propáganse independentemente das fontes, pero son producidos por elas no proceso que chamamos *radiación*. As ecuacións de ondas con fontes

$$\left( \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\left( \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J} \quad (3.3)$$

contéñen a información necesaria pra describir este proceso.

Pra simplificar a notación a ecuacións escalares da forma

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -g. \quad (6.1)$$

onde  $\psi(\mathbf{r}, t)$  representa a compoñente do campo nunha dirección arbitraria  $\hat{\mathbf{u}}$ , usando definición  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F})$ ,  $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{R}$  do laplaciano vectorial.

Supoñemos a densidade de fonte  $g(\mathbf{r}', t)$  contida nun volumen  $V'$  finito e nula fóra dun intervalo temporal tamén finito. Sendo  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , e  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  a distancia entre os puntos onde están definidos a fonte e o campo, introducimos o concepto de *tempo remoto*

$$t' = t - \frac{R}{c} \quad (6.2)$$

que dará conta do *principio de causalidade*: o efecto (campo) é posterior á causa (fonte).

### SOLUCIÓN DA ECUACIÓN DE ONDAS CON FONTES

Queremos resolver a ecuación inhomoxénea (6.1). Isto é, dados  $\mathbf{r}$  e  $t$  xenéricos, obter  $\psi(\mathbf{r}, t)$  a partir da distribución de “fontes”  $g(\mathbf{r}', t')$ . No teorema de Green,

$$\int_{V'} (\psi \nabla'^2 \phi - \phi \nabla'^2 \psi) dv' = \oint_{S'} (\psi \nabla' \phi - \phi \nabla' \psi) \cdot d\mathbf{a}',$$

supoñendo  $\psi$ ,  $g$  e  $\phi$  expresados nas coordenadas con prima, fagamos  $\phi(\mathbf{r}', t') = \frac{1}{R} f\left(t' + \frac{R}{c}\right)$ ,

con  $f$  derivable dúas veces, pero arbitraria, por agora. Demóstrase que

$$\nabla'^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = -4\pi \phi R \delta(\mathbf{R}) \quad (6.3)$$

Supoñamos (fig. 1) que  $V'$  é o interior da superficie  $S'$ . Usando (6.1) e (6.3):

$$\begin{aligned}
 & \int_{V'} \left\{ -4\pi\psi(\mathbf{r}', t') f\left(t' + \frac{R}{c}\right) \delta(\mathbf{R}) + \varphi \mathbf{g} + \frac{1}{c^2} \left( \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} - \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} \right) \right\} dv' = \\
 & = -4\pi\psi(\mathbf{r}, t) f(t) + \int_{V'} f\left(t' + \frac{R}{c}\right) \frac{\mathbf{g}}{R} dv' + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{V'} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t'} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \right) dv' = \\
 & = \oint_{S'} \left( -\psi \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} f\left(t' + \frac{R}{c}\right) + \frac{\hat{\mathbf{R}}}{cR} \psi f'\left(t' + \frac{R}{c}\right) - \frac{1}{R} f\left(t' + \frac{R}{c}\right) \nabla' \psi \right) \cdot d\mathbf{a}' = \\
 & = \oint_{S'} (\psi \nabla' \varphi - \varphi \nabla' \psi) \cdot d\mathbf{a}'
 \end{aligned}$$

Agora fagamos tender  $f$  á delta de Dirac

$$f(t') = \delta(t' - t)$$

e integremos no tempo entre  $-\infty$  e  $\infty$ :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -4\pi\delta(t' - t) \psi(\mathbf{r}, t') + \int_{V'} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) \frac{\mathbf{g}(\mathbf{r}', t')}{R} dv' \right\} dt' + \\
 & + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt'} \int_{V'} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t'} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \right) dv' dt' = \int_{-\infty, S'}^{\infty} (\psi \nabla' \varphi - \varphi \nabla' \psi) \cdot d\mathbf{a}' dt'
 \end{aligned}$$

En  $t' = \pm\infty$   $\varphi$  e  $\partial\varphi/\partial t'$  son cero, polo tanto a terceira integral é cero. En canto á integral de superficie, cambiando o orden de integración,

$$\begin{aligned}
 & \oint_{S'} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\psi \nabla' \varphi - \varphi \nabla' \psi) dt' \right\} \cdot d\mathbf{a}' = \\
 & = \oint_{S'} \left\{ -\psi \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) + \frac{\hat{\mathbf{R}}}{cR} \psi \delta'\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) - \frac{1}{R} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) \nabla' \psi \right\} \cdot d\mathbf{a}' = \\
 & = \oint_{S'} \left\{ -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \psi - \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial t'} - \frac{1}{R} \nabla' \psi \right\} \Bigg|_{\left(t - \frac{R}{c}\right)} \cdot d\mathbf{a}'
 \end{aligned}$$

O término que contén  $\delta'$  intégrase por partes. Se a superficie  $S$  se pón a unha distancia suficientemente grande, como as fontes son nulas fóra dun intervalo temporal limitado, o integrando pódese facer cero, logo a integral tamén. En definitiva, temos

$$-4\pi\psi(\mathbf{r}, t) + \int_{V'} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dv'$$

Logo:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dv' \quad (6.4)$$

O potencial  $\psi$  obtense de igual maneira ca o potencial electrostático, pero integrando as fontes nun momento anterior  $t' = t - R/c$  dependente da distancia  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Chámase por isto *potencial retardado*.

Omitindo as coordenadas, a relación escríbese da forma máis compacta:

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{[g]}{R} dv' \quad (6.5)$$

sendo  $[g](\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}', t - R/c)$ .

Con campos  $g$  de variación sinusoidal expresados en notación complexa teremos,

$$[g]_{fis}(t') = g_{fis}(t - R/c) = \text{Re}\{ge^{i\omega(t-R/c)}\} = \text{Re}\{ge^{-ikR}e^{-i\omega t}\}$$

de onde o campo  $[g]$  será, tamén en notación complexa

$$[g] = ge^{-ikR} \quad (6.6)$$

co resultado

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{ge^{-ikR}}{R} dv' \quad (6.7)$$

### Derivación das fontes remotas

As fontes  $[\rho]$  e  $[\mathbf{J}]$  dependen de  $\mathbf{r}'$  e  $t$ , pero ademais de  $\mathbf{r}$ , xa que entran afectadas por un operador de “tempo remoto”  $\mathfrak{R}$ :

$$\begin{aligned} [\rho] &= \rho \circ \mathfrak{R} \\ [\mathbf{J}] &= \mathbf{J} \circ \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (6.8)$$

definido como

$$\mathfrak{R} : (\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \in \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathfrak{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = (\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \in \mathbb{R}^4$$

En cambio  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  dependen de  $\mathbf{r}'$  e  $t'$ , con  $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ . Polo tanto  $\nabla[\rho]$ ,  $\nabla \cdot [\mathbf{J}]$  e  $\nabla \times [\mathbf{J}]$  non son nulos, senon que

$$\nabla[\rho] = \frac{\partial \rho}{\partial t'} \nabla t' = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} [\dot{\rho}] \quad (6.9)$$

$$\nabla \cdot [\mathbf{J}] = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \cdot \nabla t' = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \cdot [\dot{\mathbf{J}}] \quad (6.10)$$

$$\nabla \times [\mathbf{J}] = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \times \nabla t' = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \times [\dot{\mathbf{J}}] \quad (6.11)$$

onde

$$[\dot{\rho}] = \frac{\partial [\rho]}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t'} \quad , \quad [\dot{\mathbf{J}}] = \frac{\partial [\mathbf{J}]}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \quad (6.12)$$

O primeiro resultado (6.9) é simplemente  $\nabla(\rho \circ \mathfrak{R})$ . As outras dúas demóstranse de forma inmediata pra calquera campo da forma  $\hat{\mathbf{u}} \psi$ , con  $\hat{\mathbf{u}}$  uniforme, e polo tanto pra calquera  $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{x}}J_x + \hat{\mathbf{y}}J_y + \hat{\mathbf{z}}J_z$ .

A definición do valor en tempo remoto  $t' = t - R/c$  das fontes é aplicable a fontes escalares ou vectoriales

$$[\rho](\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \rho(\mathbf{r}', t') \quad ; \quad [\mathbf{J}](\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') \quad (6.13)$$

Podemos relacionar as derivadas espaciales con respecto a coordenadas campo (sin prima) e fonte (con prima) usando os segundos membros das ecuacións. Hai que ter en conta que  $t'$  depende de  $\mathbf{r}$  e de  $\mathbf{r}'$ . Esta dependencia resulta dunha derivación en cadea, sabendo que

$$\nabla t' = -\frac{1}{c} \nabla R = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} = -\nabla' t'$$

Por exemplo <sup>1</sup>

$$\nabla[\rho] = \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t'} \cdot \nabla t' \right] \quad ; \quad \nabla'[\rho] = [\nabla' \rho] + \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t'} \nabla' t' \right]$$

Sumando as dúas expresións resulta a primeira das relacións que siguen. As outras dúas obtéñense da mesma maneira

$$\begin{aligned} [\nabla' \cdot \rho] &= \nabla[\rho] + \nabla'[\rho] \\ [\nabla' \cdot \mathbf{J}] &= \nabla \cdot [\mathbf{J}] + \nabla' \cdot [\mathbf{J}] \\ [\nabla' \times \mathbf{J}] &= \nabla \times [\mathbf{J}] + \nabla' \times [\mathbf{J}] \end{aligned} \quad (6.14)$$

### Campos de Jefimenko

Resolvemos a ecuación de ondas

$$\left( \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (3.2)$$

usando o resultado (6.5):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{[\nabla' \rho]}{R} dv' &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\nabla'[\rho] + \nabla[\rho]}{R} dv' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left( \frac{\nabla'[\rho]}{R} - [\rho] \nabla' \frac{1}{R} - \frac{1}{cR} \hat{\mathbf{R}} [\dot{\rho}] \right) dv' = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} [\rho] \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv' + \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{V'} [\dot{\rho}] \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} dv' \end{aligned}$$

Na deducción usóuse a relación (6.14). A integral de volumen do gradiente convértese nunha integral en  $S'$ , que se anula. A integral da corrente pódese escribir directamente

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{J}] dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\dot{\mathbf{J}}]}{R} dv'$$

resultando

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} [\rho] \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{V'} [\dot{\rho}] \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\dot{\mathbf{J}}]}{R} dv' \quad (6.15)$$

Esta expresión do campo eléctrico é relativamente manexable, pero non evidencia un concepto moi importante. Se consideramos a ecuación de continuidade en tempo remoto

$$[\dot{\rho}] = -[\nabla' \cdot \mathbf{J}] = -\nabla \cdot [\mathbf{J}] - \nabla' \cdot [\mathbf{J}] = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{J}}] \cdot \hat{\mathbf{R}} - \nabla' \cdot [\mathbf{J}]$$

e usamos o teorema de integración por partes tridimensional

<sup>1</sup>  $\nabla[\rho]$  e  $\nabla'[\rho]$  son os gradientes da magnitude remota  $[\rho]$ .  $[\nabla' \rho]$  é o gradiente  $\nabla'$  de  $\rho$ . Todo dado en  $\mathbf{r}'$ ,  $t'$ .

$$\int_{V'} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} (\nabla' \cdot [\mathbf{J}]) + ([\mathbf{J}] \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \right\} dv' = \oint_S \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} [\mathbf{J}] \cdot \hat{\mathbf{n}} da' = 0$$

O escalar gradente calcúlase da seguinte maneira. Pra todo  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ :

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \left\{ ([\mathbf{J}] \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \right\} = [\mathbf{J}] \cdot \nabla' \left( \hat{\mathbf{u}} \cdot \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \right) = [\mathbf{J}] \cdot \nabla' \left( \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}}{R^2} \right) = -[\mathbf{J}] \cdot \left\{ \frac{\hat{\mathbf{u}}}{R^2} - 2 \frac{\hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}}{R^3} \right\} = \hat{\mathbf{u}} \cdot \left\{ 2 \frac{\hat{\mathbf{R}} [\mathbf{J}] \cdot \hat{\mathbf{R}}}{R^2} - \frac{[\mathbf{J}]}{R^2} \right\}$$

Con esto a primeira integral de (6.15) escríbese

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{V'} [\rho] \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} dv' = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{V'} \frac{2\hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}} \cdot [\mathbf{J}] - [\mathbf{J}]}{R^2} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}} \cdot [\mathbf{j}]}{R} dv'$$

No segundo integrando reconecemos a *diferencia*  $[\mathbf{J}]_{\parallel} - [\mathbf{J}]_{\perp}$  entre as compoñentes de  $[\mathbf{J}]$  paralela e perpendicular a  $\mathbf{R}$ . Dos integrandos da última integral e segunda de (6.15) resulta un dobre produto vectorial. Ó final temos, representando as compoñentes paralela e perpendicular de  $[\mathbf{J}]$  de forma estendida <sup>2</sup>:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} [\rho] \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv' + \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{V'} \frac{(\hat{\mathbf{R}} \otimes \hat{\mathbf{R}})[\mathbf{J}] + \hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times [\mathbf{J}])}{R^2} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times [\mathbf{j}])}{R} dv' \quad (6.16)$$

En canto a  $\mathbf{B}$ , da ecuación

$$\left( \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J} \quad (3.3)$$

operamos igual que se fixo pra chegar a (6.15):

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\nabla' \times \mathbf{J}]}{R} dv' &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times [\mathbf{J}] + \nabla \times [\mathbf{J}]}{R} dv' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left( \nabla' \times \frac{[\mathbf{J}]}{R} - \nabla' \frac{1}{R} \times [\mathbf{J}] - \frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \times [\mathbf{j}] \right) dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [\mathbf{J}]}{R^2} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{V'} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [\mathbf{j}]}{R} dv' \end{aligned}$$

O resultado é, logo

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\mathbf{J}] \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{V'} \frac{[\mathbf{j}] \times \hat{\mathbf{R}}}{R} dv' \quad (6.17)$$

Os primeiros termos de (6.16) e (6.17) son os campos que producirían as fontes se fosen estáticas e de valor igual a  $[\rho]$  e  $[\mathbf{J}]$ , ou sea, *os campos estáticos retardados*. Por depender da distancia ás fontes según  $1/R$ , son dominantes a pequenas distancias. O campo eléctrico tén ademáis un término intermedio que depende de  $\mathbf{J}$  e lóxicamente non aparecería se  $\rho$  fose estática. As últimas integrais son os *campos de radiación*.

### Campos de radiación

Os términos

<sup>2</sup> A presenza de termos de tipo tensorial indica que  $\mathbf{E}$ , aunque se poida representar pola súas compoñentes como se fose un campo vectorial, non o é en realidade. Con  $\mathbf{B}$  pasa outro tanto..

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times [\dot{\mathbf{j}}])}{R} dv' \quad (6.18)$$

$$\mathbf{B}_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{V'} \frac{[\dot{\mathbf{j}}] \times \hat{\mathbf{R}}}{R} dv' \quad (6.19)$$

son de especial importancia, porque a grandes distancias das fontes predominan sobre os campos estáticos retardados. Cando  $R$  é moito maior ca as dimensións lineales de  $V$  podemos poñer <sup>3</sup>

$$\mathbf{B}_{rad} \underset{R \rightarrow \infty}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\langle \hat{\mathbf{R}} \rangle}{\langle R \rangle} \times \int_{V'} [\dot{\mathbf{j}}] dv' \quad (6.20)$$

$$\mathbf{E}_{rad} \underset{R \rightarrow \infty}{=} -c \langle \hat{\mathbf{R}} \rangle \times \mathbf{B}_{rad} \quad ; \quad \mathbf{B}_{rad} \underset{R \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{c} \langle \hat{\mathbf{R}} \rangle \times \mathbf{E}_{rad}$$

Supoñendo o orixen de coordenadas nalgún punto de  $V$  ou próximo tal que  $r' \ll r$  pra todo  $V$ , esto sería

$$\mathbf{B}_{rad} \underset{r \rightarrow \infty}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \times \int_{V'} [\dot{\mathbf{j}}] dv' \quad (6.21)$$

$$\mathbf{E}_{rad} \underset{r \rightarrow \infty}{=} -c \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{rad} \quad ; \quad \mathbf{B}_{rad} \underset{r \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{rad}$$

que son as relacións que cumpren as ondas transversales propagándose radialmente. O vector de Poynting

$$\mathbf{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} \underset{r \rightarrow \infty}{=} \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \left| \hat{\mathbf{r}} \times \int_{V'} [\dot{\mathbf{j}}] dv' \right|^2 \quad (6.22)$$

vai sempre na dirección radial positiva. Debido ó factor  $1/r^2$ , a potencia

$$P_{rad} = \oint_S \mathbf{S}_{rad} \cdot d\mathbf{a} \geq 0 \quad (6.23)$$

que transportan a través dunha esfera  $S$  centrada nas fontes é sempre positiva, e a mesma a calquera distancia, co retardo inherente á propagación dos campos. A potencia radiada por unidade de ángulo sólido resulta

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left| \hat{\mathbf{r}} \times \int_{V'} [\dot{\mathbf{j}}] dv' \right|^2 \quad (6.24)$$

Os campos de radiación son unha compoñente dos campos *desligada* das fontes. A *enerxía radiada* non volve atrás anque se inverta a variación temporal das fontes.

Con campos monocromáticos obteríamos

<sup>3</sup>  $\langle \rangle$  indica un certo promedio que permite cumprirse a relación. Se  $r \rightarrow \infty$ , mantendo  $r'$  finito, podemos substituír  $\mathbf{R}$  por  $\mathbf{r}$ .

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{32\pi^2} \left| \int_{V'} \mathbf{J} \times \mathbf{k} e^{ik \cdot \mathbf{r}'} dv' \right|^2 \quad (6.25)$$

### Exemplo 6.1: dipolo eléctrico

Un dipolo eléctrico puntual é o sistema radiante máis simple. Consiste nunha distribución de carga neta nula

$$Q = \int_{V'} \rho dv' = 0$$

distribuída nun volumen  $V'$  de dimensións despreziables en comparación coa distancia á que se observa o campo ( $r' \ll r$ ). O seu momento dipolar  $\mathbf{p}$  é

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \mathbf{r}' \rho dv' \quad (6.26)$$

Ademáis hai que supoñer que a velocidade de variación de  $\rho$  é o bastante baixa pra que  $[\rho]$  non teña momentos de orden superiores. Facemos as seguintes aproximacións:

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \cong r \left( 1 - \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right) ; \quad R^{-n} \cong r^{-n} \left( 1 + n \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right)$$

$$[\rho] = \rho|_{t-r/c} + \langle [\dot{\rho}] \rangle \frac{R-r}{c} \cong \rho|_{t-r/c} + [\dot{\rho}] \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{cr}$$

Sabendo que a integral de  $\rho$  no tempo fixo  $t-r/c$  é a carga total nula, calculamos as integrais (6.16) e (6.17)

$$\begin{aligned} \int_{V'} [\rho] \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv' &= \int_{V'} [\rho] \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{R^3} dv' \cong \int_{V'} [\rho] \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \left( 1 + 3 \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right) dv' = \\ &\cong \mathbf{r} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{cr^2} \cdot \int_{V'} [\dot{\rho}] \mathbf{r}' dv' + \frac{1}{r^3} \left\{ - \int_{V'} [\rho] \mathbf{r}' dv' + 3 \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int_{V'} [\rho] \mathbf{r}' dv' \right\} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} [\dot{\mathbf{p}}]}{cr^2} + \frac{(3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})[\mathbf{p}]}{r^3} \\ \int_{V'} \frac{2(\hat{\mathbf{R}} \otimes \hat{\mathbf{R}})[\mathbf{J}] - [\mathbf{J}]}{R^2} dv' &\cong \frac{(2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})[\dot{\mathbf{p}}]}{r^2} ; \quad \int_{V'} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times [\mathbf{J}])}{R} dv' \cong \frac{\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times [\dot{\mathbf{p}}])}{r} \\ \int_{V'} \frac{[\mathbf{J}] \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv' &\cong - \frac{\hat{\mathbf{r}} \times [\dot{\mathbf{p}}]}{r^2} ; \quad \int_{V'} \frac{[\mathbf{J}] \times \hat{\mathbf{R}}}{R} dv' \cong - \frac{\hat{\mathbf{r}} \times [\dot{\mathbf{p}}]}{r} \end{aligned}$$

Polo tanto os campos do dipolo son

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})[\mathbf{p}]}{r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ c \frac{(3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})[\dot{\mathbf{p}}]}{r^2} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times [\dot{\mathbf{p}}])}{r} \right\} \\ \mathbf{B} &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{r}} \times [\dot{\mathbf{p}}]}{r^2} + \frac{1}{c} \frac{\hat{\mathbf{r}} \times [\ddot{\mathbf{p}}]}{r} \right\} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Supúxose unha dependencia temporal arbitraria. Se se tratase dun dipolo con variación sinusoidal de frecuencia  $\omega = kc$ , escribiríamos, en notación complexa

$$[\mathbf{p}] = \mathbf{p} e^{-ikr}, [\dot{\mathbf{p}}] = ikc \mathbf{p} e^{-ikr}, [\ddot{\mathbf{p}}] = -k^2 c^2 \mathbf{p} e^{-ikr}$$

Por simplicidade supoñemos  $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{z}}p$ . En consecuencia

$$(3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})\hat{\mathbf{z}} = 3\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - (\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta) = 2\hat{\mathbf{r}} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta$$

Operando

$$\mathbf{E} = \frac{-pk^3 e^{-ikr}}{4\pi\epsilon_0 kr} \left\{ \hat{\mathbf{r}} \left[ -\frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] 2 \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left[ 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] \sin \theta \right\} \quad (6.28)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{pk^3 e^{-ikr}}{4\pi\epsilon_0 c kr} \hat{\boldsymbol{\phi}} \left[ 1 - \frac{i}{kr} \right] \sin \theta$$

Dependendo da distancia, distínguense tres zonas:

1. Zona estática ( $kr \ll 1$ ). Predomina o campo electrostático. Tomando  $k \rightarrow 0$ :

$$\mathbf{E}_{est} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} 2 \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta}{r^3} \quad (6.29)$$

$$\mathbf{B}_{est} = 0$$

2. Zona de radiación ( $kr \gg 1$ )

- Predominan as compoñentes que varían como  $1/r$ :

$$\mathbf{E}_{rad} = -\hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{pk^2 e^{-ikr}}{4\pi\epsilon_0 r} \sin \theta \quad (6.30)$$

$$\mathbf{B}_{rad} = -\hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\mu_0 pk^2 c e^{-ikr}}{4\pi r} \sin \theta$$

- Os campos cumpren a mesma relación ca os dunha onda plana propagándose na dirección radial:

$$\mathbf{B}_{rad} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{rad} \quad (6.31)$$

$$\mathbf{E}_{rad} = -c \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{rad}$$

- O vector de Poynting tén dirección radial en todo punto:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad}^*) = \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{2} \frac{p^2 ck^4}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \quad (6.32)$$

- A potencia que atravesara calquera esfera con centro no dipolo é a mesma, independentemente do radio:

$$P = \oint_S \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{2} \frac{p^2 ck^4}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \frac{1}{2} \frac{p^2 ck^4}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \frac{8\pi}{3} = \frac{p^2 ck^4}{12\pi\epsilon_0} \quad (6.33)$$

3. Zona de inducción ( $kr \sim 1$ ). É unha rexión de transición, cunha estrutura do campo complicada.

Débase notar que en calquera das zonas consideradas a potencia radiada é solo a que transportan os campos de radiación.

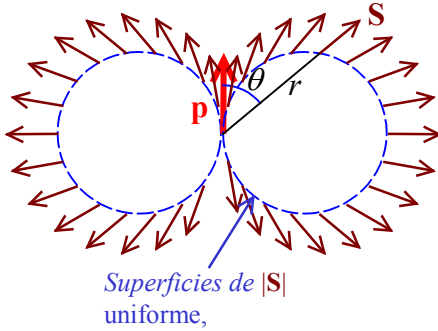


Fig. 6.2