

## CAMPOS DE CARGAS EN MOVIMIENTO

En electrodinámica clásica unha *carga puntual*<sup>1</sup> é unha carga  $q$  (no caso do electrón  $q = -e$ ) distribuída según unha densidade  $\rho(\mathbf{r}')$  en principio desconocida, pero que se pódese considerar nula fóra dun volumen que se estende unha distancia  $\delta \ll R$  arredor dun certo punto considerado a *posición* da partícula, sendo  $R$  a distancia ó punto de observación. A súa hipotética estrutura non debe afectar ó cálculo dos campos que produce. Supoñemos que toda a distribución de carga se move coa mesma velocidade  $\mathbf{u}$ , non necesariamente constante no tempo.

### POTENCIALES DE LIÉNARD-WIECHERT

Os potenciais retardados (6.7) e (6.8), onde  $[\rho](\mathbf{r}', t) = \rho(\mathbf{r}', t')$  e  $[\mathbf{J}](\mathbf{r}', t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}', t')$  son os valores das fontes nun instante

$$t' = t - R/c, \quad (7.1)$$

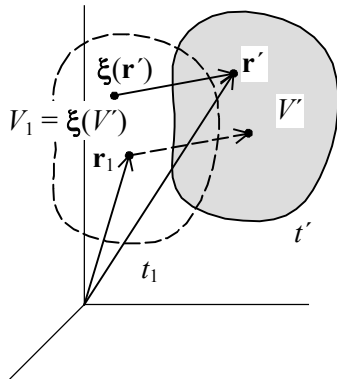


Fig. 7.1

con  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  e a posición da carga dada pola traxectoria  $\mathbf{r}'(t')$ , deben ser suficientes pra poder calcular o campo electromagnético dunha carga puntual  $q$ , sabendo que

$$\rho = q \delta(\mathbf{R})$$

Efectivamente,

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{[\delta(\mathbf{R})]}{R} dv' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R]} \int_{V'} [\delta(\mathbf{R})] dv' \quad (7.2)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 q \mathbf{u}}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\delta(\mathbf{R})]}{R} dv' = \frac{\mu_0 q \mathbf{u}}{4\pi} \frac{1}{[R]} \int_{V'} [\delta(\mathbf{R})] dv' \quad (7.3)$$

Pero

$$\int_{V'} [\delta(\mathbf{R})] dv' \neq 1$$

Físicamente isto vén de que a densidade de carga que entra na integral está dada *en tempos distintos*, xa que, por (7.1),  $t'$  depende de  $R$ , e polo tanto, en xeneral

$$\int_{V'} [\rho] dv' \neq q$$

As integrais (7.2) e (7.3) pódense reducir a unha integral nun instante  $t_1$  fixo facendo o cambio de variable

$$\left. \begin{aligned} \xi(\mathbf{r}') &= \mathbf{r}' - \int_{t_1}^{t'} \mathbf{u} d\tau \\ [\rho] &= \rho \circ \xi \end{aligned} \right\}$$

<sup>1</sup> Unha carga puntual é unha singularidade matemática. Cómprese usar a matemática correspondente ou tratala como un caso límite.

A integral da ecuación anterior dá o desplazamento dun certo punto da distribución no intervalo  $(t_1, t')$ , polo tanto  $\xi(\mathbf{r}')$  é o punto onde estaba (ou estará), no instante  $t_1$ , o punto que en  $t'$  está en  $\mathbf{r}'$ . Con esto,

$$\int_{V'} \rho \circ \xi |D'\xi| dv' = \int_{\xi(V')} \rho dv = q \quad (7.4)$$

representa a carga total que en  $t_1$  está contida no volumen  $\xi(V') = V_1$  ocupado pola partícula en  $t_1$ . É dicir, a carga  $q$  da partícula. Representamos con  $|D'\xi|$  o xacobiano da aplicación  $\xi$ , que é o determinante da diferencial  $D'\xi$  e representa o *factor de escala* de transformación do volumen<sup>2</sup>:

$$|D'\xi| = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial s'} \Big|_{\hat{\mathbf{r}}'}}{\hat{\mathbf{r}}' \cdot (\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{u}})} \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial s'} \Big|_{\hat{\mathbf{R}}} \times \frac{\partial \xi}{\partial s'} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}} \right)$$

Sea  $\langle \mathbf{u} \rangle$  a velocidade media da partícula no intervalo  $(t_1, t')$ :

$$\xi(\mathbf{r}') = \mathbf{r}' - \langle \mathbf{u} \rangle (t' - t_1).$$

e sea  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'(t_1) \in V_1$  o punto considerado a *posición* da partícula en  $t_1$ , e  $R_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ . Dacordo con (7.1), aplicando o teorema do valor medio,

$$t' - t_1 = -\frac{1}{c}(R - R_1) = -\frac{1}{c} \langle \nabla' R \rangle \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) = \frac{1}{c} \langle \hat{\mathbf{R}} \rangle \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)$$

co gradiente evaluado nalgún  $\mathbf{r}^*$  do segmento  $\overline{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}'}$ . Logo

$$\xi(\mathbf{r}') = \mathbf{r}' - \frac{\langle \mathbf{u} \rangle}{c} \langle \hat{\mathbf{R}} \rangle \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)$$

Sabendo que a derivada direccional dun campo vectorial  $\mathbf{G}$  nunha dirección  $\hat{\mathbf{F}}$  é

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} \Big|_{\hat{\mathbf{F}}} = (\hat{\mathbf{F}} \cdot \nabla) \mathbf{G},$$

que  $(\mathbf{F} \cdot \nabla)(\psi \mathbf{G}) = \psi (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{G} \mathbf{F} \cdot \nabla \psi$ , e que  $(\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{r}' = \mathbf{F}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial s'} \Big|_{\hat{\mathbf{r}}'} &= \hat{\mathbf{r}}' - \langle \mathbf{u} \rangle \hat{\mathbf{r}}' \cdot \nabla' \frac{\langle \hat{\mathbf{R}} \rangle \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{c} - \frac{\langle \hat{\mathbf{R}} \rangle \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{c} (\hat{\mathbf{r}}' \cdot \nabla') \langle \mathbf{u} \rangle \\ \frac{\partial \xi}{\partial s'} \Big|_{\hat{\mathbf{R}}} &= \hat{\mathbf{R}} - \frac{\langle \mathbf{u} \rangle}{c} \frac{\langle \hat{\mathbf{R}} \rangle \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{c} (\hat{\mathbf{R}} \cdot \nabla') \langle \mathbf{u} \rangle \\ \frac{\partial \xi}{\partial s'} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}} &= \hat{\mathbf{u}} - \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla' \frac{\langle \hat{\mathbf{R}} \rangle \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{c} - \frac{\langle \hat{\mathbf{R}} \rangle \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)}{c} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla') \langle \mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

Ó tratarse dunha carga puntual, podemos facer  $\mathbf{r}_1 = [\mathbf{r}']$ , a *posición* da partícula en  $t'$ , e tódolos termos que resultan multiplicados por  $(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)$  anúlense, quedando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial s} \Big|_{\hat{\mathbf{r}}} \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} \Big|_{\hat{\mathbf{R}}} \times \frac{\partial \xi}{\partial s} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}} \right) &= \left( \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{u} \mathbf{r}' \cdot \frac{\hat{\mathbf{R}}}{c} \right) \cdot \left( \hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{u}}{c} \right) \times \hat{\mathbf{u}} \left( 1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{c} \right) = \left( 1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{c} \right) \hat{\mathbf{r}} \cdot (\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{u}}) \\ \Rightarrow |D'\xi| &= 1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{c}, \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Co desenrolo que sigue calcúlase a relación entre o volumen  $\Delta V'$  e a súa imaxen  $\Delta \xi(V')$ , usando o volumen determinado por tres vectores, que se toman, por conveniencia, nas direccións de  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{u}$ .

e obtense, aplicando o cambio de variable como en (7.4)

$$\int_{V'} [\delta(\mathbf{R})] dv' = \frac{1}{1 - \frac{[\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{u}]}{c}} \quad (7.6)$$

Así chegamos ós *potenciales de Liénard–Wiechert*

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s} \quad (7.5)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 q [\mathbf{u}]}{4\pi s} = \phi \frac{[\mathbf{u}]}{c^2} \quad (7.6)$$

sendo

$$s = [R] - \frac{[\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}]}{c} \quad (7.7)$$

### CÁLCULO DOS CAMPOS. VELOCIDADE CONSTANTE

A posición *actual* (é dicir, en  $t$ ) da carga é  $\mathbf{r}' = [\mathbf{r}'] + \mathbf{u}R/c$ . Simplifícase o problema poñendo  $s$  en función de  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = [\mathbf{R}] - \frac{[R]}{c} \mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} s^2 &= [R]^2 - 2[R] \frac{[\mathbf{R}] \cdot \mathbf{u}}{c} + \left( \frac{[\mathbf{R}] \cdot \mathbf{u}}{c} \right)^2 = [\mathbf{R}] \cdot \left( [\mathbf{R}] - 2 \frac{[R] \mathbf{u}}{c} \right) + \left( \frac{[\mathbf{R}] \cdot \mathbf{u}}{c} \right)^2 = \\ &= \left( \mathbf{R} + \frac{[R] \mathbf{u}}{c} \right) \cdot \left( \mathbf{R} - \frac{[R] \mathbf{u}}{c} \right) + \left( \frac{[\mathbf{R}] \cdot \mathbf{u}}{c} \right)^2 = R^2 - \frac{[R]^2 u^2}{c^2} + \left( \frac{[\mathbf{R}] \cdot \mathbf{u}}{c} \right)^2 = \\ &= R^2 - \frac{R^2 u^2}{c^2} + \left( \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{c} \right)^2 = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) R^2 + \left( \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{c} \right)^2 \end{aligned}$$

(tendo en conta que  $[\mathbf{R}] \times \mathbf{u} = \mathbf{R} \times \mathbf{u}$ ). Con esto:

$$-\nabla \frac{1}{s} = \frac{1}{2s^3} \nabla s^2 = \frac{1}{s^3} \left\{ R \nabla R \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \nabla (\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) \right\} = \frac{1}{s^3} \left\{ \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \mathbf{R} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \mathbf{u} \right\}.$$

Tamén podemos facer

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t s} = \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{1}{s} = -\frac{\mathbf{u}}{s^3} \left\{ \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + u^2 \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right\} = \frac{1}{s^3} \mathbf{u} \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{c^2},$$

resultando o campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 s^3} \mathbf{R} \quad (7.8)$$

onde se simplificou a escritura introducindo o parámetro *relativista*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad (7.9)$$

Agora, pola identidade vectorial

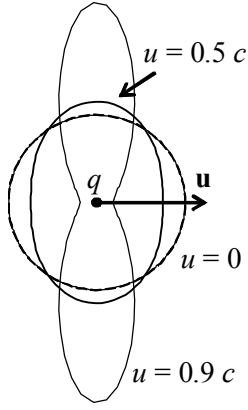


Fig. 7.2

$$\nabla \times \frac{\mathbf{u}}{s} = -\mathbf{u} \times \left( \nabla \frac{1}{s} \right)$$

obtemos<sup>3</sup>

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E} \quad (7.10)$$

É inmediato ver que a carga con velocidade constante non radia. Por exemplo, tomando unha esfera con centro en  $\mathbf{r}'$ , o vector de Poynting resulta paralelo á superficie e dá fluxo nulo.

O diagrama polar  $E(\theta)$  resulta de

$$s^2 = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) R^2 + \left( \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{c} \right)^2 = R^2 \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta \right). \text{ Queda}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\gamma^2 \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (7.11)$$

A baixas velocidades  $\mathbf{E}$  ténde ó valor estático, con simetría esférica, e  $\mathbf{B}$  ténde a cero. Según aumenta  $u$ ,  $\mathbf{E}$  redúcese na dirección lonxitudinal e refórzase na transversal (fig. 2), mantendo a dirección radial con respecto á posición actual da carga (ec. 7.8). Ó mesmo tempo  $\mathbf{B}$  aumenta en tódalas direccións, aunque máis na dirección transversal:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{u \sin \theta}{\gamma^2 \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}} \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{R^2} \quad (7.12)$$

### MOVEMENTO ARBITRARIO

A traxectoria vén dada pola función  $[\mathbf{r}'](t')$ , logo os potenciales de Liénard-Wiechert están expresados en función de  $\mathbf{r}$  e  $t'$ :

$$\begin{aligned} s(\mathbf{r}, t') &= [R] - \frac{[\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}]}{c} \\ [\mathbf{R}] &= \mathbf{r} - [\mathbf{r}'] \\ [\mathbf{u}] &= \frac{d[\mathbf{r}']}{dt'} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Pero nas ecuacións dos campos

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.37)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.36)$$

os potenciales deben estar expresados función de  $\mathbf{r}$  e  $t$ , e por eso temos que calcular as derivadas derivando en cadea a función implícita  $s(\mathbf{r}, t)$ , partindo de  $s(\mathbf{r}, t')$ :

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \frac{1}{s} &= \frac{1}{s^2} \nabla s = \frac{1}{s^2} \left( \nabla s|_{t'} + \frac{\partial s}{\partial t'} \nabla t' \right) \\ -\frac{\partial}{\partial t} \frac{[\mathbf{u}]}{s} &= \left( \frac{[\mathbf{u}]}{s^2} \frac{\partial s}{\partial t'} - \frac{1}{s} \frac{\partial [\mathbf{u}]}{\partial t'} \right) \frac{\partial t'}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

<sup>3</sup> Obsérvase que os campos non son os valores retardados dos campos estáticos.

Derivando as relacións

$$\begin{aligned} [R]^2 &= |\mathbf{r} - [\mathbf{r}']|^2 \\ [R] &= c(t - t') \end{aligned}$$

como funcións de  $\mathbf{r}$  e  $t'$ , e considerando  $t'(\mathbf{r}, t)$ :

$$\left. \begin{aligned} 2[\mathbf{R}] \cdot \frac{\partial [\mathbf{R}]}{\partial t'} &= 2[R] \frac{\partial [R]}{\partial t'} \Rightarrow \frac{\partial [R]}{\partial t'} = -\frac{[\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}]}{[R]} \\ \frac{\partial [R]}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{\partial [R]}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{[R]}{[R] - \frac{[\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}]}{c}} = \frac{[R]}{s} \quad (7.14)$$

Tamén

$$\left. \begin{aligned} \nabla [R] &= \nabla [R]_{t'cte} + \frac{\partial [R]}{\partial t'} \nabla t' = \frac{[\mathbf{R}]}{[R]} - \frac{[\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}]}{[R]} \nabla t' \\ \nabla [R] &= -c \nabla t' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla t' = -\frac{[\mathbf{R}]}{c[R] - [\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}]} = -\frac{[\mathbf{R}]}{cs}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t'} = -\frac{[\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}]}{[R]} + \frac{[u]^2}{c} - \frac{[\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}]}{c}$$

Chamaremos *posición virtual* da carga, ó punto  $\mathbf{r}'_0$  onde estaría en  $t$  se a partir do momento  $t' = t - R/c$  se seguise movendo coa velocidade  $[\mathbf{u}]$  que tiña nese momento (fig. 3). Sea

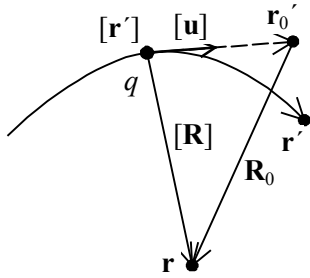


Fig. 7.3

Así

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_0 = [\mathbf{R}] - [\mathbf{u}] \frac{[R]}{c}$$

$$\begin{aligned} \nabla s|_{t'cte} &= \frac{[\mathbf{R}]}{[R]} - \frac{[\mathbf{u}]}{c} = \frac{\mathbf{R}_0}{[R]} \\ \nabla t' + \frac{[\mathbf{u}]}{c^2} \frac{\partial t'}{\partial t} &= -\frac{\mathbf{R}_0}{cs} \\ [R]_s &= [\mathbf{R}] \cdot \mathbf{R}_0 \end{aligned}$$

e operando con estes resultados:

$$\begin{aligned} -\nabla \frac{1}{s} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial [\mathbf{u}]}{\partial t} \frac{1}{s} &= \frac{1}{s^2} \left\{ \left( -\frac{\mathbf{R}_0}{cs} \right) \frac{\partial s}{\partial t'} + \nabla s|_{t'cte} \right\} - \frac{[\dot{\mathbf{u}}]}{c^2 s} \frac{\partial t'}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{s^2} \left\{ \left( -\frac{\mathbf{R}_0}{cs} \right) \left( -\frac{[\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}]}{[R]} + \frac{[u]^2}{c} - \frac{[\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}]}{c} \right) + \frac{\mathbf{R}_0}{[R]} \right\} - \frac{[\dot{\mathbf{u}}]}{c^2 s} \frac{[R]}{s} = \\ &= \frac{\mathbf{R}_0}{cs^3} \left( \frac{[\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}]}{[R]} - \frac{[u]^2}{c} + \frac{cs}{[R]} \right) + \frac{\mathbf{R}_0 [\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}] - [R]_s [\dot{\mathbf{u}}]}{c^2 s^3} \end{aligned}$$

Dado que  $cs = c[R] - [\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}]$ , o último paréntesis escríbese como  $c(1 - [u]^2/c^2) = c/\gamma^2$ . O numerador do último término condénsase no dobre produto vectorial  $[\mathbf{R}] \times (\mathbf{R}_0 \times [\dot{\mathbf{u}}])$ . En definitiva,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{R}_0}{\gamma^2 s^3} + \frac{[\mathbf{R}] \times (\mathbf{R}_0 \times [\dot{\mathbf{u}}])}{c^2 s^3} \right\} \quad (7.15)$$

O campo magnético pódese calcular directamente a partir das fórmulas de Jefimenko (6.18) e (6.19):

$$\begin{aligned} \lim_{r' \rightarrow \{\mathbf{r}'\}} [\hat{\mathbf{R}}] \times \lim_{r' \rightarrow \{\mathbf{r}'\}} \int_{V'} \left\{ \frac{[\rho] \hat{\mathbf{R}}}{R^2} + \frac{2 \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}} \cdot [\mathbf{J}] - [\mathbf{J}]}{cR^2} + \frac{\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times [\mathbf{J}])}{cR} \right\} dv' = \\ = \frac{1}{c} \lim_{r' \rightarrow \{\mathbf{r}'\}} \int_{V'} \left( \frac{[\mathbf{J}] \times [\hat{\mathbf{R}}]}{R^2} + \frac{[\mathbf{j}] \times [\hat{\mathbf{R}}]}{R} \right) dv' \end{aligned}$$

As integrais son, salvo constantes, os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Pra unha fonte puntual en  $[\mathbf{r}']$  queda

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\hat{\mathbf{R}}] \times \mathbf{E} \quad (7.16)$$

Sabendo que  $[\hat{\mathbf{R}}] \times \mathbf{R}_0 = \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{R}]$ , compróbase que os campos (7.15) e (7.16) se diferencian de (7.8) e (7.10) nun término que depende da aceleración. Os de (7.8) e (7.10), correspondentes a unha carga movéndose con velocidade constante, chámanse *campos de velocidade* e os términos adicionais de (7.15) e (7.16), *campos de radiación*.

Unha consecuencia notable deste resultado é que unha carga en movemento acelerado *radia potencia*<sup>4</sup>.

### CAMPOS DE RADIACIÓN

Os términos de (7.15) e (7.16) proporcionales á aceleración teñen tódalas propiedades dos campos de radiación. Varían como  $1/R$ , son perpendiculares entre eles e a  $[\mathbf{R}]$  e cumpren a relación de proporcionalidade  $E = cB$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{rad} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{s^3} [\mathbf{R}] \times (\mathbf{R}_0 \times [\dot{\mathbf{u}}]) \\ \mathbf{B}_{rad} &= \frac{1}{c} [\hat{\mathbf{R}}] \times \mathbf{E}_{rad} \end{aligned} \quad (7.17)$$

O vector de Poynting correspondente é

$$\mathbf{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E}_{rad} \times ([\hat{\mathbf{R}}] \times \mathbf{E}_{rad}) = \epsilon_0 c [\hat{\mathbf{R}}] E_{rad}^2$$

Substituíndo:

$$\mathbf{S}_{rad} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{[\hat{\mathbf{R}}]}{s^6} |[\mathbf{R}] \times (\mathbf{R}_0 \times [\dot{\mathbf{u}}])|^2 \quad (7.18)$$

O vector de Poynting dá o fluxo de enerxía por unidade de área e tempo  $t$  (tempo do observador). Podémolo poñer como

$$\mathbf{S} = \frac{[\hat{\mathbf{R}}]}{[R]^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{dU}{d\Omega} \right)$$

Pero pra calcular a enerxía *perdida pola partícula*, por unidade de ángulo sólido, é necesario referila ó tempo  $t'$ . Usando (7.14):

$$\mathbf{S} = \frac{[\hat{\mathbf{R}}]}{[R]^2} \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{d}{dt'} \left( \frac{dU}{d\Omega} \right) = \frac{[\hat{\mathbf{R}}]}{[R]s} \frac{d}{dt'} \left( \frac{dU}{d\Omega} \right)$$

Logo

<sup>4</sup> Incluso no caso do movemento circular uniforme.

$$\frac{d}{dt'} \left( \frac{dU}{d\Omega} \right) = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{[R]}{s^5} \{ [\mathbf{R}] \times (\mathbf{R}_0 \times [\dot{\mathbf{u}}]) \}^2 \quad (7.19)$$

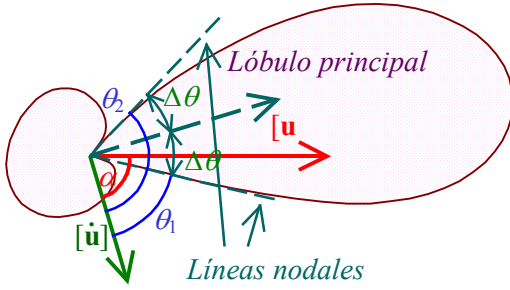


Fig. 7.4

O diagrama de radiación resultante tén a forma dun toroide en xeneral asimétrico. A grandes velocidades o factor  $1/s^5$  produce un reforzamento da radiación na dirección da velocidade. Hai dúas *direccións nodales*, nas que non existe radiación, que son as direccións en que  $\mathbf{R}_0$  e a aceleración son paralelas:

$$\mathbf{R}_0 \times [\dot{\mathbf{u}}] = 0 \Rightarrow [\hat{\mathbf{R}} \times \dot{\mathbf{u}}] = \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}]$$

Esto significa que as direccións nodales están contidas no plano determinado pola velocidade e a aceleración. Tomando ángulos con respecto á aceleración, e sendo  $\alpha$  o correspondente a  $\mathbf{u}$ , os ángulos  $\theta_{1,2}$  das direccións nodales veñen dados por

$$\text{sen } \theta_{1,2} = \frac{u}{c} \text{sen } \alpha \quad (7.20)$$

A potencia radiada total pódese calcular<sup>5</sup> integrando (7.19) sobre o ángulo sólido completo (fórmula de Lienard). Dá:

$$\frac{dU_{rad}}{dt'} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^6 \left\{ [\dot{\mathbf{u}}]^2 - ([\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}]/c)^2 \right\} \quad (7.21)$$

Descompoñendo a aceleración nas súas compoñentes paralela e perpendicular á velocidade, obtemos unha expresión útil:

$$\frac{dU_{rad}}{dt'} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left( \gamma^6 [\dot{\mathbf{u}}_{\parallel}]^2 + \gamma^4 [\dot{\mathbf{u}}_{\perp}]^2 \right) \quad (7.22)$$

### RADIACIÓN A BAIXAS VELOCIDADES.

Se  $u \ll c$  podemos facer  $\mathbf{R}_0 \cong \mathbf{R}$  e  $s \cong R$ . Así

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3} \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times [\dot{\mathbf{u}}])$$

$$\mathbf{B}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3 R^2} [\dot{\mathbf{u}}] \times \mathbf{R}$$

$$\mathbf{S}_{rad} = \epsilon_0 c \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \left| \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}} \cdot [\dot{\mathbf{u}}] - [\dot{\mathbf{u}}] \right|^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\hat{\mathbf{R}} [\dot{\mathbf{u}}]^2 \text{sen}^2 \theta}{R^2} \quad (7.23)$$

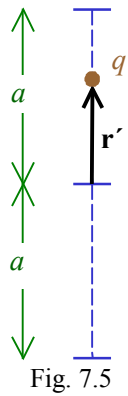
sendo  $\theta$  o ángulo que  $\mathbf{R}$  forma coa aceleración. As superficies de  $S$  constante son toroides co eixe na dirección da aceleración e simétricos respecto a  $[\dot{\mathbf{u}}]$  e ó plano perpendicular a  $[\dot{\mathbf{u}}]$  que pasa pola posición retardada da partícula.

Integrando sobre unha esfera de radio  $R$  obtemos a *fórmula de Larmor* da potencia total radiada:

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2 [\dot{\mathbf{u}}]^2}{c^3} \quad (7.24)$$

<sup>5</sup> Alternativamente, resulta de facer a xeneralización relativista da fórmula de Larmor ().

**Exemplo 9.1**



Supoñamos unha carga  $q$  en movemento oscilatorio

$$\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{z}} a \cos \omega t \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{z}} \omega^2 a \cos \omega t$$

Radiará unha potencia instantánea

$$P = \frac{q^2 a^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4}{c^4} \cos^2 \omega t$$

A potencia media

$$\langle P \rangle = \frac{p^2 c k^4}{12\pi\epsilon_0}$$

Fig. 7.5

é a potencia radiada (6.32) por un dipolo oscilante  $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{z}} qa$ . A condición de *baixa velocidade*  $\omega a \ll c$  equivale á de *dipolo puntual*  $ka \ll 1$ .

**ACELERACIÓN PARALELA Á VELOCIDADE.**

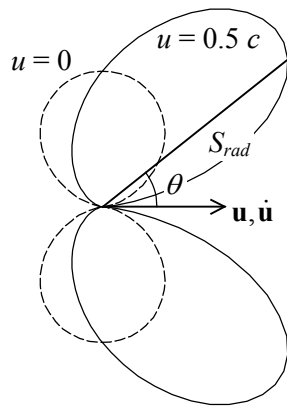


Fig. 7.6

O caso é parecido ó anterior:  $[\dot{\mathbf{u}}] \parallel [\mathbf{u}] \Rightarrow \mathbf{R}_0 \times [\dot{\mathbf{u}}] = [\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{u}}]$ .

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} [\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{u}})]$$

$$\mathbf{B}_{rad} = \frac{q[\mathbf{R}]}{4\pi\epsilon_0 c^3 s^3} [\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{R}]$$

$$\mathbf{S}_{rad} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4\pi c^3} \left(\frac{[\mathbf{R}]}{s}\right)^4 \frac{[\dot{\mathbf{u}}]^2 \sin^2 \theta}{s^2} [\hat{\mathbf{R}}] \quad (7.25)$$

Como, pra  $[\mathbf{R}]$  dado,  $s$  é menor na dirección do movemento, o lóbulo de radiación adiantase na dirección da velocidade, independentemente do sentido da aceleración (fig. 6).

**Espectro da radiación. Radiación de frenado.**

Supoñamos que a carga é decelerada desde unha velocidade inicial  $u \ll c$ . O campo radiado na dirección  $\theta$  será:

$$E_{rad}(\theta, t) = \frac{q \sin \theta [\dot{u}]}{4\pi\epsilon_0 c^2 R}$$

Pra calcular o espectro da radiación, fagamos a transformada de Fourier:

$$E_{rad}(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-i\omega t} E(\theta, t) dt = \frac{q \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-i\omega t} [\dot{u}](t) dt$$

Anque non se conoza a aceleración, podemos supoñer que o frenado se realiza nun tempo  $\tau$  moi pequeno. Facendo  $\omega\tau \ll 1$ :

$$E_{rad}(\theta, \omega) = \frac{q \sin \theta}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2 R} \Delta u e^{-i\omega t_0}$$

Pola relación de Parseval  $\int_{-\infty}^{\infty} |E(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega$ , se chamamos

$E_{(\omega_1, \omega_2)}(t)$  á transformada inversa de  $E(\omega)$  limitada á banda  $(\omega_1, \omega_2)$ , neste intervalo de frecuencia rádiase unha enerxía

$$U_{(\omega_1, \omega_2), rad} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{(\omega_1, \omega_2)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 c \left( \oint_S |E_{(\omega_1, \omega_2)}|^2 \hat{\mathbf{R}} \cdot d\mathbf{a} \right) dt =$$

$$= 4\pi \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{q^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3 R^2} (\Delta u)^2 \left( \oint_S \sin^2 \theta \hat{\mathbf{R}} \cdot d\mathbf{a} \right) d\omega = (\omega_2 - \omega_1) \frac{q^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} (\Delta u)^2$$

e a enerxía radiada por unidade de intervalo de frecuencia debe ser

$$\frac{dU_{rad}}{d\omega} = 4\pi \epsilon_0 c \oint_S |E(\omega)|^2 da = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{2}{3\pi} \left( \frac{\Delta u}{c} \right)^2 \quad (7.26)$$

Évitase un resultado infinito <sup>6</sup>, supoñendo que o espectro está limitado superiormente por unha frecuencia na que un cuanto de radiación equivale a toda a enerxía (clásica) da partícula:

$$\omega_{m\acute{a}x} = \frac{mu^2}{2\hbar}$$

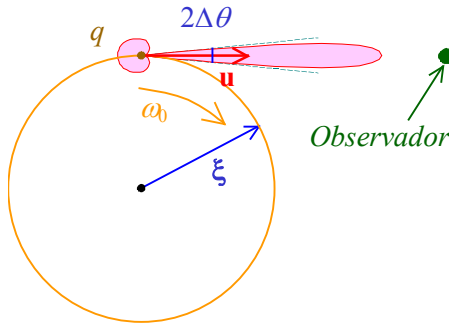


Fig. 7.7

**ACELERACIÓN PERPENDICULAR Á VELOCIDADE.**

O movemento instantáneo estará dado por unha rotación arredor dun certo punto  $\mathbf{r}_0$ , con velocidade angular instantánea  $\boldsymbol{\omega}_0$  e radio de xiro  $\boldsymbol{\xi}$ , sendo  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\xi}$ . Se a derivada da velocidade angular instantánea é cero (movemento nun plano sin aceleración tanxencial), tamén se cumpre que  $\dot{\mathbf{u}} = -\omega_0^2 \boldsymbol{\xi}$ . Cando é así,

$$\boldsymbol{\xi} = -\frac{u^2}{\dot{u}^2} \dot{\mathbf{u}} \quad ; \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \frac{\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}}{u^2} \quad (7.27)$$

Interesa especialmente <sup>7</sup> o caso de velocidades próximas a  $c$ . Nestas condicións a radiación concéntrase nun lóbulo delgado na dirección de  $[\mathbf{u}]$ , coas liñas nodales (7.20) contidas no plano do movemento e formando con  $[\mathbf{u}]$  ángulos que cumpren  $\cos \Delta\theta = u/c$ . A partícula emitirá, nunha dirección dada, un impulso de campo con duración do orden de  $\Delta t' \approx 2\Delta\theta/\omega_0$ , que, aproximando o coseno, queda

$$\Delta t' \approx \frac{2}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2}{\omega_0 \gamma}$$

Un observador situado no plano do movemento recibirá o impulso durante un tempo  $\Delta t$  que podemos calcular usando (7.14):

$$\Delta t \cong \frac{R}{c} \Delta t' \approx (1 - u/c) \frac{2}{\omega_0 \gamma} \cong \frac{1 - u^2/c^2}{1 + u/c} \frac{2}{\omega_0 \gamma} \cong \frac{1}{\omega_0 \gamma^3} \quad (7.28)$$

<sup>6</sup> Isto é consecuencia de supoñer un tempo de frenado infinitamente pequeno.

<sup>7</sup> É o caso do acelerador de partículas tipo sincrotrón.

Esto permite estimar o ancho do espectro de radiación, que será do orden de

$$\Delta\omega \approx \omega_0 \gamma^3 \quad (7.29)$$

Por outro lado, a potencia instantánea radiada, particularizando (7.22), resulta:

$$\frac{dU}{dt'} = \frac{q^2 \dot{u}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^4 \quad (7.30)$$

### RADIACIÓN DE ČERENKOV

Anque unha carga movéndose con velocidade  $\mathbf{u}$  constante no vacío non radia, se se móve nun medio no que a velocidade de propagación  $v$  do campo é menor ca a  $u$ , a perturbación que crea non pódese seguir á carga. Este é, intuitivamente, o mecanismo da radiación de Čerenkov.

Sea unha carga puntual movéndose na dirección  $z$ . Se supoñemos que en  $t = 0$  está no orixen de coordenadas, crea unha corrente

$$\mathbf{J} = q\mathbf{u}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{u}t) = \hat{\mathbf{z}}qu\delta(x)\delta(y)\delta(z - ut)$$

A transformada de Fourier é

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{\hat{\mathbf{z}}qu}{2\pi} \delta(x')\delta(y') \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z' - ut) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{\hat{\mathbf{z}}q}{2\pi} \delta(x')\delta(y') \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z' - \tau) e^{-i\frac{\omega\tau}{u}} d\tau = \frac{\hat{\mathbf{z}}q}{2\pi} \delta(x')\delta(y') e^{-i\frac{\omega z'}{u}} \end{aligned}$$

Pra obter o potencial vectorial  $\mathbf{A}$  evitando resultados infinitos, calcularemos a contribución dun volumen  $V'$  que na dirección  $z$  se extenda desde  $-z_1$  hasta  $z_1$ . Tomando  $r \gg z_1$ , podemos substituír  $R$  por  $r - z' \cos \theta$  (introducindo coordenadas esféricas). Coas aproximacións pertinentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\omega) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\omega) e^{-i\frac{\omega R}{v}}}{R} dv' = \frac{\mu_0 q}{8\pi^2} \hat{\mathbf{z}} \int_{-z_1}^{z_1} \frac{e^{-i\frac{\omega r}{v}} e^{-i\frac{\omega}{u} \left(1 - \frac{u}{v} \cos \theta\right) z'}}{r - z' \cos \theta} dz' = \\ &= \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 q}{4\pi^2} \frac{e^{-i\frac{\omega r}{v}}}{r} \frac{\text{sen} \left[ \frac{\omega z_1}{u} \left(1 - \frac{u}{v} \cos \theta\right) \right]}{\frac{\omega}{u} \left(1 - \frac{u}{v} \cos \theta\right)} \end{aligned}$$

Desto resulta, escribindo solo os campos os campos de radiación,

$$\mathbf{B}_{rad}(\omega) = -\frac{i\omega}{v} [\hat{\mathbf{R}}] \times \mathbf{A} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\mu_0 q}{4\pi^2 v} \frac{i\omega e^{-i\frac{\omega r}{v}}}{r} \frac{\text{sen} \left[ \frac{\omega z_1}{u} \left(1 - \frac{u}{v} \cos \theta\right) \right] \text{sen} \theta}{\frac{\omega}{u} \left(1 - \frac{u}{v} \cos \theta\right)} \quad (7.31)$$

$$\mathbf{E}_{rad}(\omega) = -v[\mathbf{R}] \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{R}} \frac{\mu_0 q}{4\pi^2} \frac{i\omega e^{-i\frac{\omega r}{v}}}{r} \frac{\text{sen} \left[ \frac{\omega z_1}{u} \left(1 - \frac{u}{v} \cos \theta\right) \right] \text{sen} \theta}{\frac{\omega}{u} \left(1 - \frac{u}{v} \cos \theta\right)} \quad (7.32)$$

Lóxicamente,  $\mathbf{B}_{rad} = \frac{1}{v} [\hat{\mathbf{R}}] \times \mathbf{E}_{rad}$ . O vector de Poynting, referido á posición actual da partícula, é:

$$\mathbf{S}(\omega) = [\hat{\mathbf{R}}] 4\pi\epsilon_0 E^2 \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\mu_0 q^2 \omega^2}{4\pi^3 v} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\text{sen} \left[ \frac{\omega z_1}{u} \left( 1 - \frac{u}{v} \cos \theta \right) \right] \text{sen} \theta}{\frac{\omega}{u} \left( 1 - \frac{u}{v} \cos \theta \right)} \right]^2 \quad (7.33)$$

Esta é a enerxía radiada por unidade de frecuencia e área normal á superficie do cono de radiación. A integración sobre unha esfera dá a enerxía radiada por unidade de frecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\omega} &= \frac{\mu_0 q^2 \omega^2}{4\pi^3 v} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2 \left[ \frac{\omega z_1}{u} \left( 1 - \frac{u}{v} \cos \theta \right) \right] \text{sen}^2 \theta}{\left( \frac{\omega}{u} \right)^2 \left( 1 - \frac{u}{v} \cos \theta \right)^2} \text{sen} \theta d\phi d\theta = \\ &= \frac{q^2 \omega^2 n}{2\pi^2 \epsilon_0 c^3} z_1^2 \int_{-1}^1 \frac{\text{sen}^2 \left[ \frac{\omega z_1}{u} \left( 1 - \frac{nu}{c} \cos \theta \right) \right] \text{sen}^2 \theta}{\left( \frac{\omega z_1}{u} \right)^2 \left( 1 - \frac{nu}{c} \cos \theta \right)^2} d(\cos \theta) \end{aligned}$$

( $n$  é o índice de refracción do medio).

No cono definido por  $\cos \theta = v/u$  existe un pico de radiación. Se  $z_1$  é suficientemente grande pra que  $n\omega z_1 \gg c$ , o integrando faise despreziable cando  $\cos \theta$  se aparta suficientemente de  $c/nu$ . Logo solo é importante na integral un pequeno entorno deste  $\theta$ . Esto tén dúas consecuencias. En primeiro lugar, se  $u < c/n$ , ningún valor de  $\theta$  cai neste entorno, logo a integral dá cero e non hai radiación. En segundo lugar, facendo o cambio de variable  $w = n\omega z_1 \cos \theta / c$ , podemos estender a integral a toda a recta real sin afectar significativamente ó seu valor. Como ademáis dentro deste entorno significativo  $\text{sen}^2 \theta \rightarrow 1 - c^2/n^2 u^2$ :

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \frac{\text{sen}^2 \left[ \frac{\omega z_1}{u} \left( 1 - \frac{nu}{c} \cos \theta \right) \right] \text{sen}^2 \theta}{\left( \frac{\omega z_1}{u} \right)^2 \left( 1 - \frac{nu}{c} \cos \theta \right)^2} d(\cos \theta) = \\ &= \left( 1 - \frac{c^2}{n^2 u^2} \right) \frac{c}{n\omega z_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 w}{w^2} dw = \left( 1 - \frac{c^2}{n^2 u^2} \right) \frac{c\pi}{n\omega z_1} \end{aligned}$$

Substituído isto no anterior obtense a enerxía radiada, por unidade de frecuencia, nun recorrido  $\Delta l = 2z_1$  da partícula. En términos de enerxía radiada por unidade de recorrido e de frecuencia, escribiremos:

$$\frac{d}{d\omega} \frac{\Delta U}{\Delta l} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left( 1 - \frac{c^2}{n^2 u^2} \right) \omega \quad (7.34)$$

Aparentemente, a enerxía radiada por unidade de recorrido, que se obtén integrando na frecuencia, sería infinita. Pero, considerando que a frecuencias suficientemente altas as constantes do medio tenden ás do vacío, a estas frecuencias  $n \rightarrow 1$ . Como  $u < c$ , existe unha frecuencia por encima da que non se cumpre a condición de radiación  $nu > c$ , e ó integrar sale un valor finito.