

SISTEMAS RADIANTES

Unha antena é un *sistema radiante macroscópico*. Xeneralmente tamén se pódese usar para recibir radiación e transformala en sinais electrónicos ¹.

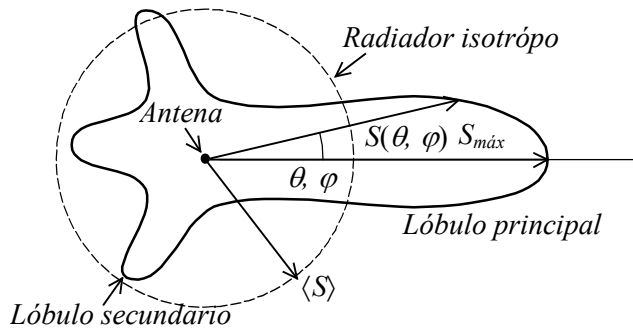


Fig. 10.1

No caso máis frecuente, a antena consistirá nun conxunto de condutores unidos a un xenerador de potencia ou un receptor por unha liña de transmisión. A antena transmisora supónse excitada por unha sinal sinusoidal *aplicada*, que no noso estudio será unha corrente ou unha tensión. As correntes nos condutores xeneran un campo electromagnético, do que estamos interesados nas compoñentes de radiación (campos a grandes distancias).

Sabido que $\mathbf{E}_{rad} = -Z_0 \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{rad}$ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, o problema matemático redúcese moitas veces ó cálculo do potencial vectorial. Pero no cálculo das correntes débese ter en conta a súa interacción cos campos na zona próxima. Debido a isto, o estudio dunha antena divídese en dúas partes:

Problema interno: o cálculo das correntes nos elementos que forman a antena.

Problema externo: o cálculo dos campos de radiación, conocidas as correntes.

PARÁMETROS BÁSICOS DUNHA ANTENA

Diagrama de radiación normalizado é o valor relativo do vector de Poynting dos campos de radiación con respecto ó valor máximo, a unha certa distancia; tamén se define referido ós campos:

$$F(\theta, \varphi) = \frac{S(\theta, \varphi)}{S_{m\acute{a}x}} \Big|_{r \text{ cte.}} ; \quad F'(\theta, \varphi) = \frac{E(\theta, \varphi)}{E_{m\acute{a}x}} \Big|_{r \text{ cte.}}$$

En calquera dos dous casos sole expresarse en dB da seguinte maneira

$$F_{dB}(\theta, \varphi) = 10 \log F(\theta, \varphi) = 20 \log F'(\theta, \varphi)$$

Sistema radiante direccional é o que tén unha dirección na que o vector de Poynting radiado S é maior. Chámase *función directividade* ó valor do vector de Poynting nunha dirección do dividido polo valor que daría un radiador isotrópico (ficticio, véxase a fig. 1) que radiase a mesma potencia:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{S(\theta, \varphi)}{\langle S \rangle} \Big|_{r \text{ cte.}}$$

¹ Isto é consecuencia do *principio de reciprocidade*, que se verá máis adiante. Non o cumpren as antenas que inclúen na súa estrutura elementos non recíprocos, como por exemplo amplificadores.

Chámase *directividade* D ó valor máximo de $D(\theta, \varphi)$.

Función ganancia é o valor do vector de Poynting dividido polo que se tería cun radiador isótropo que radiase toda a potencia P_e que recibe do xenerador:

$$G(\theta, \varphi) = 4\pi r^2 \frac{S(\theta, \varphi)}{P_e}$$

Ganancia G é o valor máximo da función ganancia $G(\theta, \varphi)$. O cociente entre a ganancia e a directividade é o *rendemento* η ou *eficiencia* da antena.

Polarización da antena é a polarización do campo radiado.

Impedancia de entrada é, se a antena está alimentada por unha línea *TEM*, o cociente entre a tensión e a intensidade no punto de alimentación da antena:

$$Z_e = \frac{V_e}{I_e}$$

(en antenas receptoras, a impedancia do equivalente Thévenin da antena) ou, se se alimenta por unha guía de ondas, a relación entre os campos eléctrico e magnético transversales mp punto de alimentación:

$$Z_e = \frac{E_t}{H_t}$$

Ancho de banda é o marxen de frecuencias nos que a antena mantén as características de ganancia e impedancia de entrada dentro dunhos límites especificados.

Nunha antena receptora defínense:

Área efectiva A_e é a relación entre a potencia $P_{máx}$ dispoñible nos terminales da antena e o vector de Poynting da onda, que se supón polarizada adecuadamente.

$$P_{máx} = S A_e$$

Temperatura de barullo é a temperatura T que debería ter unha resistencia pra xenerar unha potencia de barullo térmico igual ó barullo P_N presente nos terminales de antena nunha banda de frecuencias B (k_B é a constante de Boltzmann):

$$P_N = k_B T B$$

Relación señal/barullo e o cociente entre as potencias de señal e de barullo nos terminales da antena. Expresado en dB é

$$S/N = 10 \log \frac{P_{máx}}{P_N}$$

DIPOLO DE HERTZ

O modelo máis simple de antena (fig. 2) é un conductor delgado e de lonxitude $l \ll \lambda$ (λ é a lonxitude de onda), polo que circula unha corrente alterna de intensidade I . Os extremos están unidos a dous conductores de gran capacidade, que actúan como sumidoiros de corrente. O potencial vectorial que produce calcúlase fácilmente:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \hat{\mathbf{z}} \frac{I e^{-ikR}}{R} dz' \xrightarrow{l \ll \lambda} \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I l e^{-ikr}}{4\pi r} \quad (8.1)$$

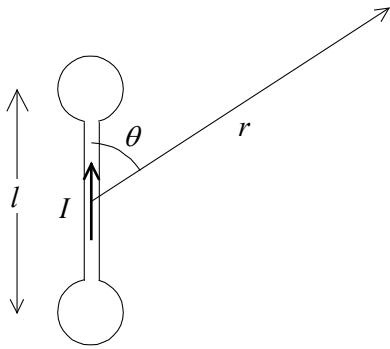


Fig. 10.2

Este é potencial vectorial do dipolo eléctrico, substituíndo $i\omega p$ por Il . Facendo a mesma substitución nas ecuacións dos campos e conservando solo as compoñentes de radiación, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{rad} &= i \frac{I l}{2 \lambda} \hat{\phi} \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta \\ \mathbf{E}_{rad} &= i \frac{I}{2} Z_0 \frac{l}{\lambda} \hat{\theta} \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta \\ \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{|I|^2}{8} Z_0 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \hat{\mathbf{r}} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \end{aligned} \quad (8.2)$$

(en $\langle \mathbf{S} \rangle$ non se necesita o subíndice porque os termos estáticos e de inducción dán promedio cero nun período). A potencia radiada calcúlase integrando nunha esfera:

$$P = \int_S \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \frac{|I|^2}{8} Z_0 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\phi d\theta = \frac{\pi}{3} Z_0 |I|^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$$

Chámase *resistencia de radiación* á resistencia R_r , que disiparía a mesma potencia ca radia a antena, pra unha corrente de amplitude I dada:

$$P_{rad} = \frac{1}{2} R_r |I|^2 \quad (8.3)$$

A resistencia de radiación do dipolo de Hertz será

$$R_r = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 Z_0 \quad (8.4)$$

Debido á condición $l \ll \lambda$, a eficiencia do dipolo de Hertz como sistema radiante é moi pequena (a relación entre potencia radiada e disipada é proporcional a l). Pero serve como punto de partida no cálculo de sistemas prácticos.

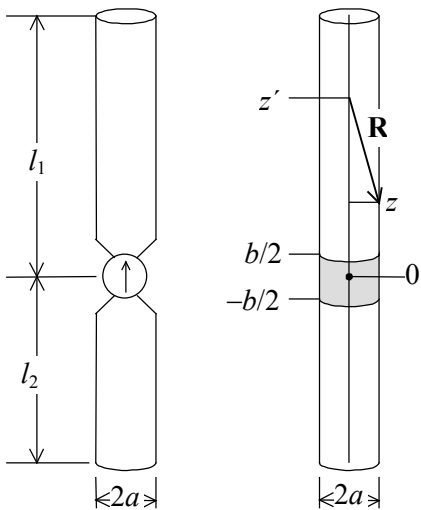


Fig. 10.3

ANTENAS DE DIPOLO

Unha *antena de dipolo* é un sistema radiante formado por un conductor recto interrompido nun certo punto onde se aplica un xenerador (fig. 3). A efectos de cálculo utilizaremos un modelo no que un cilindro circular perfectamente conductor de radio $a \ll \lambda$ se estende ó longo de eixe z hasta lonxitudes l_1 e $-l_2$, sendo estas lonxitudes do orden de λ . Unha pequena lonxitude $b \ll \lambda$ (*espacio excitador*) está ocupada polos xeneradores que alimentan a antena. Neste espacio existe un campo eléctrico \mathbf{E} , dirixido na dirección z . A condición $a \ll \lambda$ xustifica que se poidan calcular os campos no exterior do dipolo, incluída a zona próxima, como se as correntes circulasen polo eixe do cilindro:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{I e^{-ikR}}{R} dz',$$

cunha corrente $I(z)$ variable ó longo do dipolo. En particular, na superficie do conductor temos a

ecuación integral de Hallen:

$$\mathbf{A}|_S = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \int_{-l_2}^{l_1} I(z') \mathcal{K}(z-z') dz' \quad (8.5)$$

sendo $K(x)$ o núcleo da integral:

$$K(x) = \frac{e^{-ik\sqrt{x^2+a^2}}}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Coa condición de Lorentz (7.5), podemos expresar o potencial escalar en función do vectorial

$$\phi = i \frac{c}{k} \nabla \cdot \mathbf{A}$$

e escribir o campo eléctrico como función do potencial vectorial unicamente

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - i\omega\mathbf{A} = -i \frac{c}{k} (\nabla\nabla \cdot \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A})$$

Sabendo que na superficie da antena, fóra do espazo excitador, o campo eléctrico tanxencial é $E_z = 0$, e que \mathbf{A} tén dirección z , do anterior resulta

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z|_S = 0,$$

coa conocida solución en senos. Este feito permite asimilar a antena de dipolo a unha *línea de transmisión aberta*. Particularizamos (8.5) pró caso máis frecuente e simple do *dipolo simétrico* ($l_1 = l_2 = l$). Dado que $I(z')$ debe ser *función par* de z' ,

$$\frac{1}{C} \int_{-l_2}^{l_1} I(z') \mathcal{K}(z-z') dz' = \text{sen } k(\xi - |z|)$$

Esta ecuación tén difícil solución, no caso xeneral. Pero se observamos que cando $a \rightarrow 0$ a parte real da integral diverxe nun entorno de $z' = z$, ó axustar a constante C de maneira que o resultado sea finito resulta que, no límite, unicamente debe contribuir á integral o punto $z' = z$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{C} \int_{-l_2}^{l_1} I(z') \mathcal{K}(z-z') dz' = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} I(z') \mathcal{K}(z-z') dz' = \Omega I(z)$$

Por outra parte I débese anular nos extremos, e no punto de excitación debe coincidir coa corrente I_0 aplicada á antena. Usando estes valores como condicións de contorno:

$$I(z) = I_0 \frac{\text{sen } k(l-|z|)}{\text{sen } kl} \quad (8.6)$$

ecuación que dá resposta ó *problema interno* do dipolo simétrico.

A ecuación de continuidade

$$\frac{\partial I}{\partial s} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$$

permite calcular a distribución lineal de carga no dipolo:

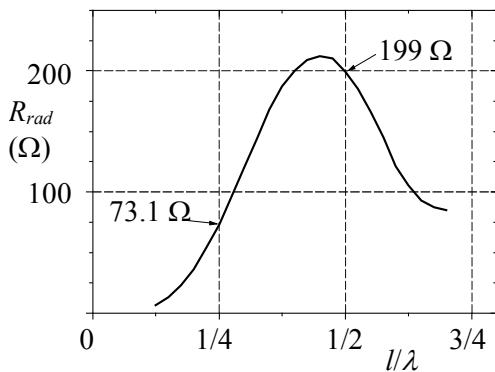


Fig. 10.4

$$\lambda = \frac{I_0}{c} \frac{\cos k(l - |z|)}{\text{sen } kl} \quad (8.7)$$

O campo de radiación do dipolo simétrico calcúlase a partir do do dipolo de Hertz:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{rad} &= i \frac{I_0}{2\lambda \text{sen } kl} Z_0 \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\text{sen } \theta e^{-ikr}}{r} \left[\int_0^l \text{sen } k(l - z') dz' + \int_{-l}^0 \text{sen } k(l + z') dz' \right] = \\ &= i \frac{I_0 Z_0}{2\pi \text{sen } kl} \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos kl}{r \text{sen } \theta} \end{aligned} \quad (8.8)$$

e a potencia radiada é

$$P = \frac{1}{2Z_0} \oint_S |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{a} = \frac{|I_0|^2 Z_0}{4\pi \text{sen}^2 kl} \int_0^\pi \frac{[\cos(kl \cos \theta) - \cos kl]^2}{\text{sen } \theta} d\theta \quad (8.9)$$

A resistencia de radiación calcúlase según (8.3) despois de conocida a potencia radiada. A integral (8.9) está resolta, pero a solución é pouco manexable. Preséntase en forma gráfica na fig. 4.

ASOCIACIÓNS DE ELEMENTOS RADIANTES

Suponse un conxunto de N elementos radiantes xeométricamente idénticos, situados en posicións \mathbf{r}_n e alimentados por intensidades I_n , con $n = 1 \dots N$. Cada elemento está contido nun volumen V'_n arredor do punto \mathbf{r}_n . As dimensións dos elementos e as distancias entre eles son do orden da lonxitude de onda. Se facemos $\mathbf{r}'|_{V'_n} = \mathbf{r}_n + \boldsymbol{\xi} \mathbf{r}'$, en cada un dos elementos, verifícase ³

$$\mathbf{J}|_{V'_n} = I_n \mathbf{j}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n) = I_n \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}) \quad (8.10)$$

onde a función \mathbf{j} está determinada pola xeometría dos elementos, igual pra todos. Logo

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_n \int_{V'_n} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv'$$

A distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ admite a seguinte expresión:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n - \boldsymbol{\xi}|^2 = |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2 + r_n^2 - 2(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{r}_n \\ (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|)(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|) &= r_n^2 - 2(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{r}_n \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| &= \frac{r_n^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|} = \frac{2(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|} \end{aligned}$$

e na zona de radiación ($r \gg \lambda$):

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cong |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_n \quad (8.11)$$

Substituíndo:

$$\int_{V'_n} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' = e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_n} \int_{V'_n} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') e^{-ik|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \cong e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_n} \int_{V'_0} \frac{\mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}) e^{-ik|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|} dv'$$

² \mathbf{r}_n é un punto de referencia pra cada elemento.

³ Esta é unha corrente *aplicada*. Aparte dela, pódese haber correntes *inducidas* que non se terán en conta neste estudio.

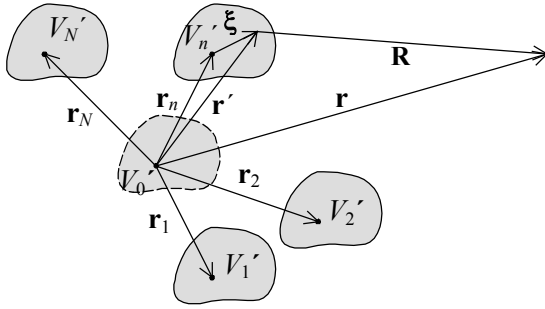


Fig. 10.5

Na última substitución V_0' é o volumen resultante de trasladar V_n' ó orixen de coordenadas, co que $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ en V_n' é igual a $\mathbf{j}(\boldsymbol{\xi})$ en V_0' . O denominador $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ pódese cambiar por $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|$, xa que nos dous casos é aproximadamente igual a r . A integral

$$\mathbf{A}_0 = \int_{V_0'} \frac{\mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}) e^{-ik|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|}}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|} dV'$$

é o potencial vectorial que produciría un calquera dos N elementos radiantes excitado cunha corrente unidade e situado no orixen de

coordenadas. Con todo isto,

$$\mathbf{A} = \sum_{n=1}^N I_n e^{ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_n} \mathbf{A}_0 = f \mathbf{A}_0 \quad (8.12)$$

Dadas as correntes e as posicións \mathbf{r}_n dos elementos radiantes, o factor f depende unicamente das coordenadas angulares

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N I_n e^{ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_n} \quad (8.13)$$

Chámase *factor de asociación* ou *factor espacial*. A ecuación (8.12) expresa o *teorema de multiplicación de diagramas de radiación* que di que o diagrama de radiación dun sistema de N radiadores idénticos alimentados con correntes I_n ($n = 1, \dots, N$) é o produto do diagrama dun calquera deles, alimentado por unha corrente unidade e posto no orixen, por un determinado factor de asociación.

A ecuación (8.13) téna forma dunha transformada de Fourier espacial. O diagrama de radiación dado por \mathbf{A}_0 en xeneral non terá unha gran direccionalidade. En cambio o factor f pódese adoptar teóricamente calquera forma deseada, variando as posicións \mathbf{r}_n e as correntes I_n , con un número suficiente de elementos. Dise que o diagrama de radiación está *dominado* polo factor de asociación.

Baterías lineales

Supoñamos que os N elementos están dispostos ó longo do eixe z en posicións $z_n = nl$ ($n = 0 \dots N-1$). Por simetría, o factor f dependerá solo de θ . Será

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{inkd \cos \theta} = \sum_{n=0}^{N-1} I_n z^n, \quad \text{con } z = e^{ikd \cos \theta} \quad (8.14)$$

Esta é a expresión matemática do *teorema de Schelkunoff*: Toda batería lineal con separacións comensurables pódese representar por un polinomio. Recíprocamente, todo polinomio representa unha batería lineal.

Como caso particular de batería lineal, supoñamos que as N correntes son iguais en amplitude pero están desfasadas dacordo con $I_n = I_0 e^{-n\delta}$. Isto pódese conseguir situando os N elementos equiespaciados ó longo dunha línea de transmisión. Obtense un factor espacial:

$$f(\theta) = I_0 \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(kd \cos \theta - \delta)} = I_0 \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\psi}$$

(chamando ψ a $kd \cos \theta - \delta$). Como os termos da suma están en sucesión xeométrica, a suma é

$$f(\theta) = \frac{1 - e^{iN\psi}}{1 - e^{i\psi}} = \frac{e^{i\frac{N\psi}{2}} e^{-i\frac{N\psi}{2}} - e^{i\frac{N\psi}{2}} e^{i\frac{N\psi}{2}}}{e^{i\frac{\psi}{2}} e^{-i\frac{\psi}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}} e^{i\frac{\psi}{2}}} = e^{i(N-1)\frac{\psi}{2}} \frac{\text{sen} \frac{N\psi}{2}}{\text{sen} \frac{\psi}{2}}$$

No límite $\psi \rightarrow 0$ esto toma o valor $|f(\theta_0)| = N$, con $\cos \theta_0 = \delta/kd$. A batería té un lóbulo principal na dirección θ_0 , e o campo radiado nesta dirección é igual a N veces o campo dun elemento solo.

TEOREMA DE RECIPROCIDADE

Supoñamos que, nun medio lineal e *recíproco*⁴, existen dous conxuntos de xeneradores eléctricos e magnéticos, $\{\mathbf{J}_A^{(a)}, \mathcal{M}_A^{(a)}\}$ e $\{\mathbf{J}_A^{(b)}, \mathcal{M}_A^{(b)}\}$, contidos nun volumen V , e que producen campos eléctricos e magnéticos que representaremos cos respectivos superíndices, que cumprirán as ecuacións (1.33). Así temos

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mathbf{E}^{(b)} \times \mathbf{H}^{(a)} - \mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{H}^{(b)}) = \\ & = \mathbf{H}^{(a)} \cdot [-\mathcal{M}_A^{(b)} - i\omega\mu\mathbf{H}^{(b)}] - \mathbf{E}^{(b)} \cdot [\mathbf{J}_A^{(a)} + \sigma\mathbf{E}^{(a)} + i\omega\varepsilon\mathbf{E}^{(a)}] + \\ & - \mathbf{H}^{(b)} \cdot [-\mathcal{M}_A^{(a)} - i\omega\mu\mathbf{H}^{(a)}] + \mathbf{E}^{(a)} \cdot [\mathbf{J}_A^{(b)} + \sigma\mathbf{E}^{(b)} + i\omega\varepsilon\mathbf{E}^{(b)}] \end{aligned}$$

Se o medio é recíproco, no peor dos casos os tensores σ , ε e μ serán simétricos, e cumprírase $\mathbf{E}^{(a)} \cdot [\sigma\mathbf{E}^{(b)}] = \mathbf{E}^{(b)} \cdot [\sigma\mathbf{E}^{(a)}]$, $\mathbf{E}^{(a)} \cdot [\varepsilon\mathbf{E}^{(b)}] = \mathbf{E}^{(b)} \cdot [\varepsilon\mathbf{E}^{(a)}]$ e $\mathbf{H}^{(a)} \cdot [\mu\mathbf{H}^{(b)}] = \mathbf{H}^{(b)} \cdot [\mu\mathbf{H}^{(a)}]$. Por outro lado, a integral de volumen da diverxencia transfórmase nunha integral de superficie. Logo

$$-\oint_S (\mathbf{E}^{(b)} \times \mathbf{H}^{(a)} - \mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{H}^{(b)}) \cdot d\mathbf{a} = \int_V [\mathbf{J}_A^{(b)} \cdot \mathbf{E}^{(a)} - \mathcal{M}_A^{(b)} \cdot \mathbf{H}^{(a)} - \mathbf{J}_A^{(a)} \cdot \mathbf{E}^{(b)} + \mathcal{M}_A^{(a)} \cdot \mathbf{H}^{(b)}] dV$$

A superficie pódese extender cara a fóra sin que varíe a integral de volumen. Sobre unha esfera de radio $R \rightarrow \infty$ contribuirán unicamente os campos de radiación, o que nos permite facer:

$$\begin{aligned} \oint_S [\mathbf{E}^{(a)} \times \mathbf{H}^{(b)} - \mathbf{E}^{(b)} \times \mathbf{H}^{(a)}] \cdot d\mathbf{a} & \rightarrow \frac{1}{Z_0} \oint_S \{ \mathbf{E}^{(a)} \times [\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}^{(b)}] - \mathbf{E}^{(b)} [\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}^{(a)}] \}_{rad} \cdot d\mathbf{a} = \\ & = \frac{1}{Z_0} \oint_S [\mathbf{E}^{(a)} \cdot \mathbf{E}^{(b)} - \mathbf{E}^{(b)} \cdot \mathbf{E}^{(a)}]_{rad} da = 0 \end{aligned}$$

Desto dedúcese a *integral de Lorentz*

$$\int_V [\mathbf{J}_A^{(b)} \cdot \mathbf{E}^{(a)} - \mathcal{M}_A^{(b)} \cdot \mathbf{H}^{(a)}] dV = \int_V [\mathbf{J}_A^{(a)} \cdot \mathbf{E}^{(b)} - \mathcal{M}_A^{(a)} \cdot \mathbf{H}^{(b)}] dV \quad (8.18)$$

que expresa matematicamente o principio de reciprocidade: o traballo por unidade de tempo que fan as correntes (b) sobre os campos de (a) é igual ó que fan as fontes (a) sobre os campos de (b) .

TEOREMA DE RECIPROCIDADE APLICADO A ANTENAS

Supoñanse dúas antenas, denotadas polos subíndices 1 e 2. Os seus espazos excitadores serán V_1 e V_2 , respectivamente. A integral de Lorentz deberá aplicarse a $V_1 + V_2$, xa que no resto do espazo as correntes son cero. Consideraremos dous casos:

⁴ Enténdese por medio recíproco pra unha certa propiedade o medio lineal que, podendo ser anisótropo, té esta propiedade caracterizada por un tensor simétrico.

Excitación en tensión

Con esto queremos dicir que non hai correntes eléctricas *aplicadas*. Supoñamos en principio dúas configuracións de correntes magnéticas aplicadas $\mathbf{M}_A^{(a)}$ e $\mathbf{M}_A^{(b)}$ tales que $\mathbf{M}_A^{(a)}|_2 = 0$ e $\mathbf{M}_A^{(b)}|_1 = 0$. É dicir, na configuración (a) excítase unicamente a antena 1, e na configuración (b) excítase unicamente a antena 2 (na fig. 6 móstrase a antena 1 nas dúas configuracións).

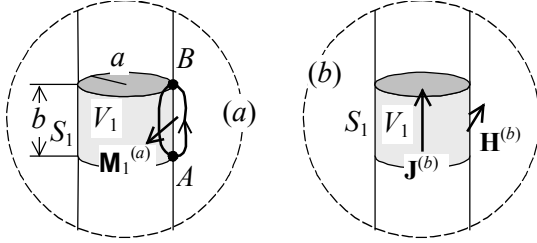


Fig. 10.6

Consideremos o espazo excitador da antena 1, V_1 . Se aplicamos unha tensión dada por $V_1^{(a)}$ (entre os puntos A e B na figura) e calculamos a circulación de \mathbf{E} sobre un camiño que rodea a fronteira S_1 do espazo V_1 , de tal maneira que a contribución do término $-\mathbf{Z}\mathbf{H}^{(a)}$ se poida despreziciar, obtemos

$$V_1^{(a)} = -bE^{(a)} = -\oint_C \mathbf{E}^{(a)} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \mathbf{M}_A^{(a)} \cdot d\mathbf{a}$$

A corrente magnética $\mathbf{M}_1^{(a)}$ terá a forma dunha corrente superficial, xa que a integral anterior debe valer $V_1^{(a)}$ sempre que o arco AB estea fóra do espazo V_1 e o arco BA estea dentro, e téñ dirección φ negativa.

Consideremos a situación (b). Se na antena 2 hai aplicada tensión unha tensión $V_2^{(b)}$, *inducirase* unha densidade de corrente $\mathbf{J}^{(b)}$, e pola antena 1 (que agora non téñ tensión aplicada, logo está en cortocircuíto) circulará unha corrente $I_1^{(b)}$. Esta corrente produce un campo magnético que na superficie S_1 téñ dirección φ positiva e vale:

$$2\pi a H^{(b)} = I_1^{(b)}$$

Logo:

$$\int_V \mathbf{H}^{(b)} \cdot \mathbf{M}_1^{(a)} dV = \int_{S_1} \mathbf{H}^{(b)} \cdot \mathbf{M}_{1,s}^{(a)} da = 2\pi a b H^{(b)} E^{(a)} = I_1^{(b)} V_1^{(a)}$$

Razonando de igual maneira pra V_1 obtemos que

$$\int_V \mathbf{H}^{(a)} \cdot \mathbf{M}_1^{(b)} dV = I_2^{(a)} V_2^{(b)}$$

Levamos estes resultados a (8.17) e dividimos por $V_1^{(a)} V_2^{(b)}$:

$$\left(\frac{I_1}{V_2} \right)^{(b)} = \left(\frac{I_2}{V_1} \right)^{(a)} \quad (8.18)$$

Este resultado pódese entender así: “se unha tensión V aplicada á antena 2 fai circular unha corrente I pola antena 1, unha tensión V aplicada á antena 1 fará que circule pola antena 2 a mesma corrente I”.

Excitación en corrente

Agora supoñamos que aplicamos unha corrente $I_1^{(a)}$ á antena 1, e por simplicidade suporemos que a densidade de corrente é uniforme en todo o espazo excitador:

$$\pi a^2 J_A^{(a)} = I_1^{(a)}$$

Se excitamos en corrente a antena 2, sin corrente aplicada na antena 1 (esto significa que está en circuíto aberto), no espazo excitador desta *inducirase* un campo $\mathbf{E}^{(b)}$, e polo tanto unha tensión

$$V_1^{(b)} = bE^{(b)}$$

De onde,

$$\int_V \mathbf{E}^{(b)} \cdot \mathbf{J}_A^{(a)} dV = V_1^{(b)} I_1^{(a)}$$

De igual maneira:

$$\int_V \mathbf{E}^{(a)} \cdot \mathbf{J}_A^{(b)} dV = V_2^{(a)} I_2^{(b)}$$

e, como agora non hai correntes magnéticas:

$$\left(\frac{V_1}{I_2} \right)^{(b)} = \left(\frac{V_2}{I_1} \right)^{(a)} \quad (8.19)$$

Gracias ó teorema de reciprocidade a teoría de antenas en réximen de emisión pódese aplicar directamente a antenas receptoras. Concretamente:

1. O diagrama normalizado $F(\theta, \varphi)$ dunha antena é o mesmo en emisión ca en recepción.
2. O cociente entre a potencia recibida cunha antena e a aplicada a outra mantense cando se intercambian os papeles das antenas.