

CINEMÁTICA RELATIVISTA

Chámase *relatividade restrinxida* ou *especial* a teoría física das transformacións entre sistemas de referencia ¹ inerciales (non acelerados).

Os postulados de Einstein

1. As leis físicas son idénticas en tódolos sistemas de referencia inerciales. En consecuencia non existe ningún experimento que permita determinar unha velocidade absoluta, e
2. A velocidade da luz no espacio libre é constante e independente do sistema de referencia, contradín as ideas da mecánica newtoniana basadas na intuición. Dúas consecuencias inmediatas son (fig. 1):

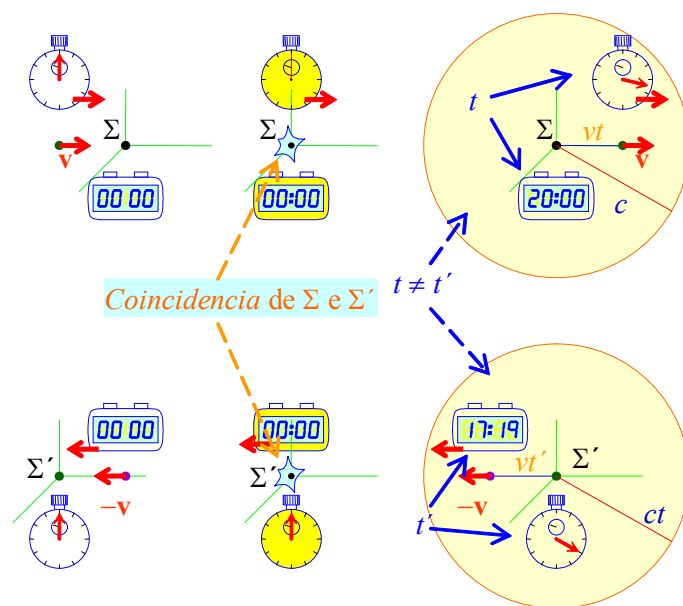


Fig. 9.1

1. Non existe un tempo absoluto. A simultaneidade de dous sucesos nun sistema de referencia non implica a simultaneidade noutros sistemas de referencia.
2. As magnitudes físicas, tales como as lonxitudes, pódense depender do sistema de referencia no que se midan.

Unha magnitude que téñe o mesmo valor en tódolos sistemas de referencia chámase *invariante*. A velocidade da luz, c , é invariante ².

Os postulados de Einstein non se deducen de ningún experimento. Simplemente son a única posibilidade conocida compatible con tódolos experimentos que se

fixeron en busca de alternativas. En realidade, que os campos electromagnéticos se propaguen sin soporte material conduce necesariamente a eles ³.

O primeiro dos postulados implica que o espazo é homoxéneo e isótropo. Ademais admítense, sin demostración, dous principios:

1. Existen *magnitudes propias* reproducibles, que son as que se medirían nun sistema de referencia con respecto ó que o obxecto medido estivese inmóvil.
2. O sentido do *tempo propio* é invariante (transcorre sempre no sentido en que aumenta a entropía).

¹ Ou sistemas de coordenadas.

² $c = 299\,792\,458$ m/s, exactamente e por definición.

³ ¿Qué diferencia hai entre *nada* en repouso e *nada* movéndose?

Simultaneidade. Lonxitudes e intervalos temporales

Admitido que c é unha *constante absoluta*, os conceptos intuitivos de espacio e tempo son contradictorios. A consistencia da teoría esixe unha *definición* previa destes conceptos.

Dado un sistema de referencia inercial Σ , empecemos por establecer un *patrón de tempo propio* en Σ , que será o período τ_0 dun proceso periódico nun sistema aislado⁴. Podemos admitir como axioma que tódolos períodos son iguais, xa que son indistinguibles. Como consecuencia inmediata, $c\tau_0$ será un patrón de lonxitude.

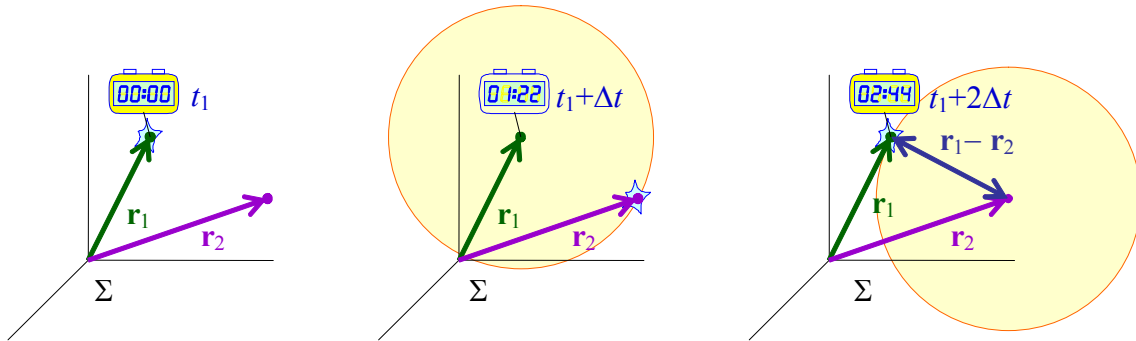


Fig. 9.2

A invarianza de c permite definir o concepto de distancia no espacio ordinario de tres dimensións (fig. 2). Supoñamos que unha señal luminosa parte dun punto \mathbf{r}_1 e chega a outro punto \mathbf{r}_2 . Coincidindo con esta chegada, desde \mathbf{r}_2 emítese outra señal luminosa que chega a \mathbf{r}_1 . Desde que sale a primeira sinal hasta que chega a segunda transcorre un tempo $2\Delta t$, medido por un cronómetro en \mathbf{r}_1 . Definimos a *distancia* entre \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 por

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = c\Delta t \quad (9.1)$$

Está claro que

1. $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \geq 0$; $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$.
2. $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ (pola isotropía do espacio).
3. $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3| \leq |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| + |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|$ (téñese a igualdade cando a sinal vai entre \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_3 pasando por \mathbf{r}_2 ; se por outro camiño chega antes, verificase a desigualdade).

Logo o espacio tridimensional téñ estrutura de espacio euclídeo, e podémolo asimilar a \mathbb{R}^3 .

Definimos *suceso elemental* como o suceso⁵ que se pódere representar, nun sistema de referencia, por un punto (t, \mathbf{r}) do espacio tetradimensional $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Dous sucesos (t_1, \mathbf{r}_1) e (t_2, \mathbf{r}_2) , onde $\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2$ e t_2 están medidos nun sistema de referencia Σ , son *simultáneos neste sistema de referencia* (fig. 3) se unha sinal luminosa que parte dun

⁴ 1 segundo é igual a 9 192 631 770 períodos da radiación correspondente á transición entre os dous niveis hiperfinos do estado fundamental dun átomo do isótopo ¹³³Cs, medidos a 0 K. Esta medida pódese facer teóricamente en calquera sistema de referencia con respecto ó cal o átomo de cesio estea inmóvil e, polo primeiro postulado da relatividade, non debe haber diferenza entre os resultados en dous sistemas inerciales calquera.

⁵ *Suceso* ou *feito* é un concepto primario que fai referencia a "algo" ligado ó espacio e ó tempo. Aquí consideramos o suceso como único, independente do sistema de referencia. Por exemplo, á "desintegración dunha partícula" dous observadores pódennlle asignar distintos valores de \mathbf{r} e t , e das masas e velocidades das partículas, pero pra cada un deles existe un instante tal que "antes" solo hai unha partícula, e "despois" hai dúas ou máis.

punto \mathbf{r}_0 equidistante de \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 nun certo instante t chega a \mathbf{r}_1 en t_1 e a \mathbf{r}_2 en t_2 . Dise neste caso que $t_1 = t_2$.

Como, dado un terceiro punto \mathbf{r}_3 sempre existen puntos equidistantes de \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 (excepto no caso en que os tres puntos estean alineados, pero neste caso a comparación pódese realizar por medio dun cuarto punto non alineado con eles), verificase $\{t_1 = t_2, t_2 = t_3\} \Rightarrow t_1 = t_3$, e podemos estender o concepto de simultaneidade a calquera número de puntos. A simultaneidade é unha relación de equivalencia. Por este método podemos establecer un tempo válido pra todo o sistema de referencia Σ .

Definimos o *intervalo temporal* entre os dous sucesos no sistema de referencia Σ como a diferenza

$$\Delta t = t_2 - t_1. \quad (9.2)$$

Se $t_1 = t_2$, a *distancia espacial* l entre os dous sucesos (t_1, \mathbf{r}_1) e (t_2, \mathbf{r}_2) , no sistema de referencia Σ , é

$$l = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|. \quad (9.3)$$

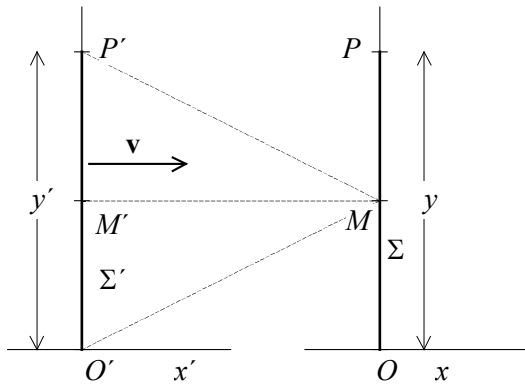


Fig. 9.4

Invarianza das lonxitudes perpendiculares á velocidade

Supóñanse dous sistemas de referencia Σ e Σ' , que se moven un respecto ó outro con velocidade \mathbf{v} ó longo do eixe x , e dous segmentos OP e $O'P'$ de *lonxitudes propias* l_0 iguais, situadas perpendicularmente á velocidade coincidindo cos eixes y e y' (por definición perpendiculares ós x), de maneira que nalgún momento os puntos centrais M e M' coinciden. A perpendicularidade significa que as distancias $O'M$ e $P'M$, medidas en Σ , e $O'M'$ e $P'M'$, medidas en Σ' , son sempre iguais.

Pola condición de perpendicularidade, en calquera dos dous sistemas O' e P' cruzarán o eixe y (do sistema Σ) simultaneamente. Polo tanto, neste momento un observador en Σ poderá medir, dacordo con (9.3) a lonxitude y' de $O'P'$, comparándoa coa lonxitude y de OP ⁶.

Intercambiado papeles, vemos que outro tanto pódese facer o observador en Σ' . O sentido contrario ($-\mathbf{v}$) da velocidade da barra OP con respecto a Σ non debe introducir ningunha diferenza, pola isotropía do espazo.

Xa que os dous observadores fan a medida no mesmo instante, ou os dous obteñen $y \leq y'$ ou os dous $y' \leq y$ ⁷.

Pero os sistemas son equivalentes, logo se en Σ se mide $l_0 = y \leq y'$, en Σ' medirase $l_0 = y' \leq y$, e se en Σ se mide $l_0 = y \geq y'$, en Σ' medirase $l_0 = y' \geq y$. Logo os dous deben obter $y = y'$. En conclusión, as dimensións perpendiculares á dirección do movemento son invariantes.

TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

⁶ Por exemplo emitindo a señal luminosa desde M de maneira que alcance os puntos O' e P' no momento en que cruzan o eixe y .

⁷ Bastaría con que cada observador puxese ó longo do eixe y ou y' correspondente “testigos” que permitisen observar posteriormente a parte do eixe que “barréu” o segmento do outro sistema.

Se $t_1 = t_2$ e $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ en Σ tamén $t_1' = t_2'$ e $\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_2'$ en calquera outro sistema de referencia Σ' .⁸ Isto equivale a dicir que existe unha transformación Λ biunívoca que permite obter (t', \mathbf{r}') en función de (t, \mathbf{r}) , é dicir, existen criterios válidos en Σ e Σ' que permiten determinar unha *coincidencia* entre os dous sistemas.

Λ debe manter as propiedades topolóxicas do espacio-tempo. Debe facer corresponder puntos próximos a puntos próximos, logo debe ser esencialmente continua. Tamén se debe esperar que sea diferenciable, xa que non debe introducir nun proceso en Σ' ningunha singularidade que non exista en Σ .

Supoñamos un sistema de referencia Σ' que se move con velocidade \mathbf{v} constante respecto a outro Σ . Un suceso (t, \mathbf{r}) en Σ estará representado en Σ' como $(t', \mathbf{r}') = \Lambda_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{r})$.

As propiedades de isotropía e homoxeneidade do espacio esixen que a diferencial de $\Lambda_{\mathbf{v}}$ sea a mesma en tódolos puntos do espacio e pra tódolos valores do tempo, é dicir, que $\Lambda_{\mathbf{v}}$ sea *lineal*.

Sea $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$. As coordenadas y e z son perpendiculares a \mathbf{v} . Logo son invariantes:

$$y' = y$$

$$z' = z$$

As variables x e t poden estar relacionadas entre elas, pero non con y nin z . Ou sea:

$$x' = a_0 + a_1x + a_2t$$

$$x = b_0 + b_1x' + b_2t'$$

Nótese que non pódese haber dependencia das coordenadas transversales. Por exemplo, se $x' = a_1x + a_2t + a_3y$, isto permitiría distinguir entre as direccións de y positiva e negativa, contra as hipótesis.

Supoñamos que en $t = t' = 0$ os sistemas Σ e Σ' coinciden:

$$x' = \gamma(x + at) \tag{9.4}$$

$$x = \gamma'(x' + bt')$$

Imos determinar as constantes utilizando dous casos particulares onde se coñece a relación entre x, x', t e t' . En primeiro lugar, sea x a posición do orixen de Σ' . No sistema Σ , $x = vt$. En Σ' , $x' = 0$. Logo

$$x' = \gamma(vt + at) = 0 \Rightarrow a = -v.$$

Se intercambiamos os papeles das coordenadas con e sin primas:

$$x = \gamma'(-vt' + bt') \Rightarrow b = v.$$

Consideremos agora unha barra de lonxitude propia l_0 movéndose co sistema Σ' , co orixen en $x_1' = 0$ e o extremo en $x_2' = l_0$. Observamos a posición dos extremos nun mesmo instante t_0 . Obtemos

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt_0) \quad x_2' = \gamma(x_2 - vt_0)$$

De onde

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\gamma} = \frac{l_0}{\gamma} \tag{9.5}$$

⁸ Por exemplo, se dúas partículas colisionan en Σ tamén deben colisionar en Σ' . O suceso estaría representado en Σ por un único (t, \mathbf{r}) en Σ' por un único (t', \mathbf{r}')

Esta é a chamada *contracción de Fitzgerald-Lorentz*. No sistema Σ as lonxitudes na dirección do movemento son menores -xa que $\gamma \geq 1$, -por (9.6), máis adiante- ca no sistema propio.

Intercambiando os papeles de Σ e Σ' :

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\gamma'} = \frac{l_0}{\gamma'}$$

Como os dous sistemas son equivalentes, dedúcese que $\gamma = \gamma'$.

Examinemos agora outro caso conocido. Supoñamos que en $t = t' = 0$ se emite un impulso luminoso desde o orixen de coordenadas común. As ecuacións da propagación deste impulso serán:

$$x = ct \quad x' = ct'$$

Levando esto ás ecuacións obtidas:

$$ct' = \gamma(c - v)t$$

$$ct = \gamma(c + v)t'$$

de onde, multiplicando membro a membro e simplificando os tempos:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (9.6)$$

con $\beta = v/c$. Consecuentemente:

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

$$x = \gamma(x' + \beta ct')$$

Elimínanse x' ou x entre estas relacións multiplicando unha delas por γ e sumándoas. Como $\gamma^2 - 1 = \gamma^2 \beta^2$, obtéñense respectivamente

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

Estas relacións son a *transformación de Lorentz*

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad (9.7)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

A transformación inversa

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \quad (9.8)$$

$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

resulta, como se deduce do primeiro postulado de Einstein, substituíndo β por $-\beta$.

Exemplo 9.1: dilatación do intervalo temporal

Supoñamos que *no mesmo punto* do sistema Σ' temos dous sucesos, un é (t'_1, \mathbf{r}') e outro (t'_2, \mathbf{r}') . No sistema Σ os tempos serán

$$ct_1 = \gamma(ct'_1 + \beta x')$$

$$ct_2 = \gamma(ct'_2 + \beta x')$$

Resulta que o intervalo temporal entre os dous sucesos, que no sistema propio é $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$ (*tempo propio*), no sistema Σ é maior:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \Delta\tau \quad (9.9)$$

Débase notar que este tempo Δt está medido en dous puntos distintos x e $x + v\Delta t$. O resultado sería o contrario se o tempo fose medido no mesmo punto x , porque neste caso o tempo propio sería o medido en Σ .

Exemplo 9.2: contracción de Lorentz

Supoñamos unha lonxitude l_0 medida, na dirección do movemento, no sistema de referencia propio Σ' (esto implica que $l_0 = x'_2 - x'_1$), móbil con respecto a Σ (fig. 4). Facendo a transformación de Lorentz,

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta ct_1) \\ x'_2 &= \gamma(x_2 - \beta ct_2) \end{aligned}$$

Medindo x_1 e x_2 sumltáneamente ($t_1 = t_2$) a súa diferenza será a lonxitude l en Σ :

$$l = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\gamma} = \frac{l_0}{\gamma} \quad (9.5)$$

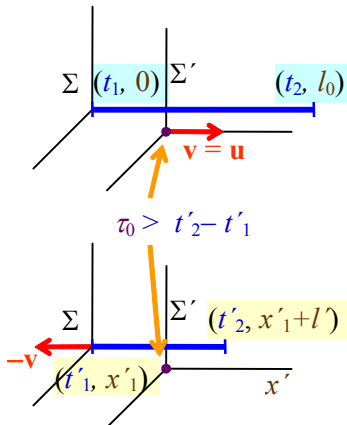


Fig. 9.5

Na fig. 5 ilústranse os dous efectos anteriores. Se unha partícula (un píon, por exemplo) cunha vida media $\tau_0 = 25.4$ ns debe recorrer unha distancia $l_0 = 300$ m a unha velocidade moi próxima a c (digamos $\gamma = 100$ pró seu sistema propio Σ') tardaría $1 \mu\text{s}$, un tempo 40 veces maior ca a súa vida media, e practicamente ningún píon chegaría ó final. Pero no sistema Σ do laboratorio o tempo de vida medio da partícula sería $\gamma\tau_0 = 2.54 \mu\text{s}$, suficiente pra que a amaior parte das partículas recorran a distancia l_0 antes de desintegrarse.

Desde o punto de vista da partícula, o laboratorio está en movemento, e a lonxitude l_0 en Σ' é $l' = l_0/\gamma = 3$ m, que recorre en $\Delta t' = 10$ ns, de maneira que tamén en Σ' as partículas chegan ó final.

CADRIVECTORES

As catro compoñentes x^α dadas construídas co tempo e as tres coordenadas espaciales nun sistema de referencia Σ :

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \quad (9.10)$$

transfórmanse, ó expresalas nun sistema de referencia Σ' que se move con respecto a Σ con velocidade $v = \beta c$ ó longo do eixe x , da forma seguinte

$$x'^\alpha = A^\alpha_\beta x^\beta \quad (9.11)$$

(usamos a convención de Einstein), con

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

A coordenada x é a compoñente x_{\parallel} de $\mathbf{x} = \mathbf{r}$ paralela a $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. As coordenadas y e z determinan a compoñente \mathbf{x}_{\perp} perpendicular a $\boldsymbol{\beta}$. Pola isotropía do espazo, as transformacións deben ser válidas independentemente da dirección de $\boldsymbol{\beta}$. En función destas compoñentes a transformación anterior é

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} &= \gamma(x_{\parallel} - \beta x^0) \\ \mathbf{x}'_{\perp} &= \mathbf{x}_{\perp} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Estas ecuacións pódense xuntar en dúas:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}) - \gamma \boldsymbol{\beta} x^0 \end{aligned} \quad (9.14)$$

Definimos como *cadrivector* unha magnitude A representada nun determinado sistema de referencia Σ por catro coordenadas $A^{\alpha} = (A^0, \mathbf{A})$ que, noutro sistema de referencia Σ' que se move con respecto ó primeiro con velocidade $c\boldsymbol{\beta}$, son

$$\begin{aligned} A'^0 &= \gamma(A^0 - \beta A_{\parallel}) \\ A'_{\parallel} &= \gamma(A_{\parallel} - \beta A^0) \\ \mathbf{A}'_{\perp} &= \mathbf{A}_{\perp} \end{aligned} \quad (9.15)$$

Coa transformación dada entre as compoñentes dun cadrivector,

$$(A'^0)^2 - A'^2_{\parallel} - A'^2_{\perp} = \frac{(A^0 - \beta A_{\parallel})^2 - (A_{\parallel} - \beta A^0)^2}{1 - \beta^2} - A^2_{\perp} = (A^0)^2 - A^2_{\parallel} - A^2_{\perp},$$

dedúcese que os cadrivectores cumpren a relación

$$(A'^0)^2 - |\mathbf{A}'|^2 = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2. \quad (9.16)$$

Introducindo no espazo vectorial \mathbb{R}^4 a métrica

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta = 0 \\ -1, & \alpha = \beta > 0 \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (9.17)$$

obtense o *espacio de Minkowski*. Nel a *norma* dun cadrivector A^{α} é

$$g_{\alpha\beta} A^{\alpha} A^{\beta} = (A^0)^2 - |\mathbf{A}|^2, \quad (9.18)$$

polo tanto (9.16) expresa simplemente que a transformación de Lorentz conserva a norma, é dicir, a norma dun cadrivector é un *invariante de Lorentz* ou *escalar*⁹, e a transformación de Lorentz é *ortogonal*:

⁹ En Relatividade un *escalar*, *invariante relativista* ou *invariante de Lorentz* é unha magnitude que non é cambiada *por ningunha* transformación de Lorentz. Unha magnitude que permanece sin cambios solo ante unha determinada transformación de Lorentz, como as compoñentes de \mathbf{r}_{\perp} , non entran nesta categoría.

$$g_{\alpha\beta} A_{\lambda}^{\alpha} A_{\mu}^{\beta} = g_{\lambda\mu} \quad (9.19)$$

O conxunto das transformacións ortogonales no espacio de Minkowski forman o *grupo de Lorentz*. As transformacións de Lorentz forman un subgrupo deste grupo, o das *rotacións*, determinado polas propiedades

$$\begin{aligned} A_{\alpha}^{\alpha} &> 0 \\ (\det A)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (9.20)$$

chamado *grupo propio de Lorentz*. Asimesmo o grupo de Lorentz é un subgrupo do *grupo de Poincaré*, que inclúe as traslacións. Unha transformación do grupo de Poincaré téna forma:

$$x'^{\alpha} = A_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} + a^{\alpha}. \quad (9.21)$$

Tempo propio

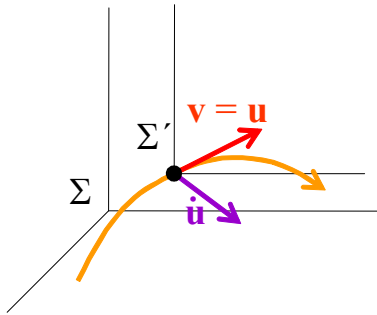


Fig. 9.7

Atrás admitimos de forma axiomática que o tempo medido no sistema (inercial) propio é invariante. De feito, é a única maneira de comparar tempos en dous sistemas de referencia distintos. En principio isto non sería aplicable a un móbil con velocidade $\mathbf{u}(t)$ variable.

Sea $\mathbf{r}'(t')$ a ecuación do movemento da partícula nun sistema Σ' , e sean os sucesos (t', \mathbf{r}') e $(t' + \Delta t', \mathbf{r}' + \Delta \mathbf{r}')$.

Agora supoñamos (fig. 7) un sistema inercial Σ' movéndose con respecto a Σ con velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t)$, de maneira que nun instante t particular o móbil estea en repouso con respecto a Σ' . Ou sea, $\mathbf{u}'(t') = 0$. A

transformación de tempos debe ter derivada continua, así que, chamdo τ ó tempo propio no sistema de referencia *non inercial* que se móve coa partícula,

$$\lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta t'}{\Delta \tau} = 1$$

O *intervalo espacio-temporal* $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - |\Delta \mathbf{r}|^2$ é un invariante de Lorentz, como se deduce de (9.16):

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t')^2 - |\Delta \mathbf{r}'|^2 = (c\Delta t)^2 - |\Delta \mathbf{r}|^2 = (\Delta s)^2 \quad (9.22)$$

Podemos escribir

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t')^2 \left(1 - \left| \frac{\Delta \mathbf{r}'}{c\Delta t'} \right|^2 \right) = (c\Delta \tau)^2 \left(\frac{\Delta t'}{\Delta \tau} \right)^2 \left(1 - \left| \frac{\Delta \mathbf{r}'}{c\Delta t'} \right|^2 \right)$$

e tomando límites,

$$\frac{ds}{d\tau} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta \tau} = c \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta t'}{\Delta \tau} \right)^2 \left(1 - \left| \frac{\mathbf{u}'}{c} \right|^2 \right)} = c$$

resultado que, ó integrar en τ dá

$$\Delta s = c \Delta \tau \quad (9.23)$$

Logo o tempo propio τ é *invariante*, independentemente de que o movemento sea ou non inercial.

Unha relación interesante dedúcese de (9.14) Facendo a transformación inversa,

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \gamma \left(1 + \frac{1}{c} \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}'}{\Delta t'} \right).$$

No límite $\Delta t' \rightarrow 0$, definindo

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (9.24)$$

obtemos

$$\frac{dt}{d\tau} = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \gamma \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{c} \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}'}{\Delta t'} \right) \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta t'}{\Delta \tau} = \gamma_u. \quad (9.25)$$

CADRIVECTOR VELOCIDADE

O feito de que o tempo propio sea invariante significa que a derivada dun cadrivector con respecto a τ sea tamén un cadrivector, é dicir, que se transforme según (9.15). Derivando x^α ,

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \frac{dt}{d\tau}$$

obtemos o *cadrivector velocidade*

$$U^\alpha = (\gamma_u c, \gamma_u \mathbf{u}) \quad (9.26)$$

A transformación (inversa) das catro compoñentes de U^α será:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_u c &= \gamma \gamma_{u'} (c + \beta u'_{\parallel}) \\ \gamma_u u_{\parallel} &= \gamma \gamma_{u'} (u'_{\parallel} + \beta c) \\ \gamma_u \mathbf{u}_{\perp} &= \gamma_{u'} \mathbf{u}'_{\perp} \end{aligned} \right\}$$

Destas ecuacións podemos deducir as fórmulas de adición de velocidades. Se un móvil téñ velocidade \mathbf{u}' con respecto a un sistema de referencia Σ' , e este se móve con velocidade \mathbf{v} con respecto a Σ , dividindo a segunda ecuación pola primeira resulta

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}'_{\parallel}}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2}} \quad (9.27)$$

De igual maneira, dividindo a terceira pola primeira,

$$\mathbf{u}_{\perp} = \frac{\mathbf{u}'_{\perp}}{\gamma \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \right)} \quad (9.28)$$

Destá última dedúcese que cias compoñentes da velocidade non se póde construír un cadrivector (\mathbf{u}_{\perp} non é invariante). Tamén se demostra (con algo de cálculo) que, se $v < c$ e $u' < c$, sempre será $u < c$, ou sea, por adición e velocidades non se póde alcanzar a velocidade da luz.

O invariante de U^α é simplemente

$$g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = \gamma_u^2 (c^2 - u^2) = c^2$$

CADRIVECTOR ACELERACIÓN

A derivada con respecto ó tempo propio do cadrivector velocidade é o *cadrivector aceleración*:

$$a^\alpha = \frac{dU^\alpha}{d\tau} \quad (9.29)$$

Poñendo u^2 como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$:

$$a^0 = \frac{dU^0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt} \frac{c}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c[1-(u/c)^2]^2}$$

$$a^1 = \frac{dU^1}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt} \frac{u_x}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{\dot{u}_x}{1-(u/c)^2} + \frac{u_x \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c^2[1-(u/c)^2]^2}$$

As demais compoñentes teñen a mesma forma ca a^1 . Xuntando a parte espacial e reescribindo os denominadores:

$$a^\alpha = \left(\gamma_u^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c}, \gamma_u^2 \dot{\mathbf{u}} + \gamma_u^4 \mathbf{u} \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c^2} \right) \quad (9.30)$$

O invariante de a^α é

$$g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta = (a^0)^2 - |\mathbf{a}|^2 = \gamma^6 \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c} \right)^2 + \gamma^4 |\dot{\mathbf{u}}|^2 = \gamma^6 |\dot{\mathbf{u}}_{\parallel}|^2 + \gamma^4 |\dot{\mathbf{u}}_{\perp}|^2 \quad (9.31)$$

Exemplo 9.3: fórmula de Liénard

O invariante anterior tén un significado especial na ecuación da potencia radiada por unha carga acelerada

$$\frac{dU_{rad}}{dt'} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^6 \left\{ [\dot{\mathbf{u}}]^2 - ([\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}]/c)^2 \right\} \quad (7.21)$$

Nótese que os valores *remotos* $[\mathbf{r}']$, $[\mathbf{u}]$ e $[\dot{\mathbf{u}}]$ son a posición, a velocidade e a aceleración da partícula en $t' = t - R/c$, que é o tempo, medido no sistema actual Σ , no que a partícula radia. Ou sea, (t', \mathbf{r}') son as coordenadas do suceso en Σ , e non en ningún suposto sistema propio Σ' da partícula. Ademais, o γ usado tén o significado (9.24) de γ_u . Operando,

$$\gamma_u^6 \left\{ |\dot{\mathbf{u}}|^2 - ([\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}]/c)^2 \right\} = \gamma_u^6 \left\{ |\dot{\mathbf{u}}|^2 - \frac{|\dot{\mathbf{u}}|^2 u^2 - (\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} \right\} = \gamma_u^6 \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c} \right)^2 + \gamma_u^4 |\dot{\mathbf{u}}|^2$$

Comparando esto con (9.30), chegamos ó resultado sorprendente

$$\frac{dU_{rad}}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta \quad (9.32)$$

Ou sea, a potencia radiada é un invariante relativista.

RELATIVIDADE E CAUSALIDADE

A invarianza do *intervalo espacio-temporal* $(\Delta s)^2$ tén importantes implicacións.

Se $(\Delta s)^2 < 0$ haberá algún sistema de referencia no que os sucesos sean simultáneos, pero teñan lugar en puntos distintos. Un intervalo tal que $(\Delta s)^2 < 0$ chámase *de tipo espacial*.

Se $(\Delta s)^2 > 0$, nalgún sistema de referencia os sucesos ocorren no mesmo punto, pero en tempos distintos. Tal intervalo chámase *de tipo temporal*.

Se $(\Delta s)^2 = 0$, o intervalo é *de tipo luminoso*.

No espacio de Minkowski \mathbb{R}^4 a condición $\Delta s = 0$ define unha hipersuperficie chamada cono de luz (fig. 6). O vértice deste hipercono é o punto do espacio-tempo que representa o *presente*, ou sea o *aquí e agora*. Os puntos do cono de luz representan o recorrido no espacio-tempo dun impulso luminoso emitido no presente.

Os puntos contidos entre o eixe de tempos e o cono de luz, con $(\Delta s)^2 > 0$, poden, en principio, estar relacionados causalmente co presente. Os que teñen $\Delta t < 0$ pertencen ó *pasado*, que é o conxunto de sucesos que dalgunha maneira pódén influir no presente. Os que teñen $\Delta t > 0$ forman o *futuro* ou conxunto de sucesos nos que o presente pódete ter efecto. Por (9.15),

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{1}{c} \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \mathbf{r} \right). \quad (9.33)$$

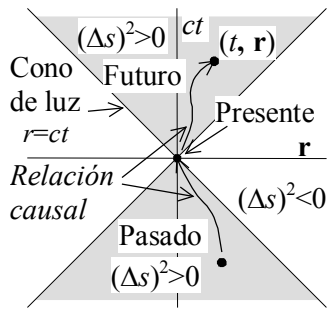


Fig. 9.6

Como $|\boldsymbol{\beta}| < 1$ e $(\Delta s)^2 > 0 \Rightarrow |\Delta \mathbf{r}| < |c\Delta t|$, $\Delta t > 0 \Rightarrow \Delta t' > 0$, e $\Delta t < 0 \Rightarrow \Delta t' < 0$. Un punto do pasado en Σ pertence ó pasado en Σ' , e un punto do futuro en Σ pertence ó futuro en Σ' . Isto exprésase dicindo que a transformación de Lorentz mantén a relación causal.

Os puntos do exterior do cono de luz non son nin pasado, nin presente nin futuro e englóbanse na denominación *todo o demáis*. Non teñen relación causal co presente, xa que nada que transporte enerxía ou información se pódete mover a velocidade maior ca c . Con respecto ó presente, é como se non existisen

Según o dito, o espacio-tempo, con relación ó presente, está dividido polo cono de luz en tres rexións: o pasado, o futuro e “todo o demáis”. Calquera transformación de Lorentz mantén esta división e non existe ningunha que cambie un determinado suceso dunha rexión a outra.